Mit der 2. Ungl. erhalten wir

$$|\beta| \leq \frac{\gamma}{4} \int_\Omega \zeta^2 |\partial_k^h \operatorname{grad} u|^2 dx + C_8 \int_\Omega (f^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + |u|^2)\, dx$$

Aus $\alpha = \beta$ sowie den Abschätzg. für $|\alpha|$ und $|\beta|$ folgt nun für $1 \leq k \leq n$ und alle genügend kleinen $|h| > 0$:

$$\int_{\Omega'} |\partial_k^h \operatorname{grad} u|^2 dx \leq \int_\Omega \zeta^2 |\partial_k^h \operatorname{grad} u|^2 dx \leq C_9 \int_\Omega (f^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + |u|^2) dx.$$

Aus Satz (7.1) ii) folgt nun $\operatorname{grad} u \in H^1(\Omega')$ und

$$\int_{\Omega'} |\partial_k \operatorname{grad} u|^2 dx \leq C_9 \int_\Omega (f^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + |u|^2)\, dx.$$

Also ist $u \in H^2(\Omega')$ und es gilt:

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C_{10}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Dasselbe Argument, aber für Ω'' statt Ω zeigt

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C_{11}\left(\|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{H^1(\Omega'')}\right)$$

sofern $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$.

Wähle eine neue Fkt. $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\zeta \equiv 1$ auf Ω'' und $0 \leq \zeta \leq 1$. In der Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j}\, dx = \int_\Omega \tilde{f} \varphi\, dx \qquad \boxed{\tilde{f} = f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu}$$

setzen wir nun $\varphi = \zeta^2 u$ und erhalten mit Leibniz Regel, Elliptizität und ε-Ungleichg. nach einigen Abschätzungen:

$$\int_\Omega \zeta^2 |\operatorname{grad} u|^2 dx \leq C_{12} \int_\Omega (f^2 + u^2)\, dx.$$

Also folgt

$$\|u\|_{H^1(\Omega'')} \leq C_{13}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Insgesamt ergibt sich wie behauptet:

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C_{14}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

<u>Zusatz zu (7.3)</u> Es genügt $b^i, c \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ vorauszusetzen: Man findet $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. Dann sind $b^i, c \in L^\infty(\Omega'')$ und man wendet den Satz auf Ω'' statt Ω an. Die Abschätzg. gilt für Ω'' auf der r.S., also erst recht für Ω.

(7.4) Satz (Höhere innere Regularität) Sei $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ und seien $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\Omega)$, sowie $f \in H^m(\Omega)$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lösung der ell. PDGL in Ω

$$Lu = f.$$

Dann gilt für jedes off. $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$u \in H^{m+2}(\Omega')$$

und es gibt eine Abschätzung:

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega')} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

wobei die Konstante C nur von Ω, Ω' und den Koeff. von L abhängt.

Bew.: Ind. nach $m \geq 0$. Der Ind. Anfang $m = 0$ folgt aus Satz 1.8 plus Zusatz da stet. Fkt. in L^∞_{loc} sind.
Die Beh. sei nun für ein fester $m \geq 0$ gezeigt. Wir wollen sie für $m+1$ zeigen. Seien $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+2}(\Omega)$, $f \in H^{m+1}(\Omega)$ und $u \in H^1(\Omega)$ sei schwache Lösg. von $Lu = f$ in Ω.
Nach Ind. Vor. ist $u \in H^{m+2}(\Omega'')$ und es gilt:

$$(*) \quad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega'')} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

für jedes $\Omega'' \subset\subset \Omega$ und $C = C(\Omega'')$. Zu $\Omega' \subset\subset \Omega$ wähle $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$.
Sei α ein Multiindex mit $|\alpha| = m+1$ und sei $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega'')$.
Einsetzen von $\varphi := (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \tilde{\varphi}$

in die Identität

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

liefert nach mehreren partiellen Integrationen:

$$a(\tilde{u}, \tilde{\varphi}) = (\tilde{f}, \tilde{\varphi})_{L^2(\Omega)}$$

wobei

$$\tilde{u} = \partial^\alpha u \in H^1(\Omega'')$$

$|\beta| \leq m-1 \Rightarrow$ in H^{m+1}

und

$$\tilde{f} := \partial^\alpha f - \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \Big[- \sum_{i,j=1}^n (\partial^{\alpha-\beta} a^{ij} \partial^\beta u_{x_i})_{x_j}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \partial^{\alpha-\beta}(b^i) \partial^\beta u_{x_i} + \partial^{\alpha-\beta}(c) \partial^\beta u \Big]$$

Diese Gleichung gilt für alle $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega'')$. Also ist $\tilde{u}$ schwache Lösung von $L\tilde{u} = \tilde{f}$ in Ω''. Aufgrund von $f \in H^{m+1}(\Omega)$ sowie (*) folgt $\tilde{f} \in L^2(\Omega'')$ mit:

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega'')} \leq C_1 \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Aus Satz 7.3 folgt nun $\tilde{u} \in H^2(\Omega')$ sowie:

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega')} \leq C_2 \left(\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega'')} + \|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega'')} \right)$$

$$\leq C_3 \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Diese Ungl. gilt für alle α mit $|\alpha| = m+1$ und $\tilde{u} = \partial^\alpha u$. Also ist $u \in H^{m+3}(\Omega')$ und

$$\|u\|_{H^{m+3}(\Omega')} \leq C_4 \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Als nächstes formulieren wir die Sobolev Ungleichungen mit deren Hilfe Sobolev Räume und C^∞-Räume in Verbindung gebracht werden können. Ein einfacher Spezialfall wird in den Übg. bewiesen

(7.5) Satz (Sobolev Ungleichungen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen beschränkt mit C^1-Rand und sei $u \in H^{k,p}(\Omega)$.

i) Ist $k < \frac{n}{p}$ so ist $u \in L^q(\Omega)$ wobei $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ und es gilt

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{k,p}(\Omega)}$$

wobei C nur von Ω, k, p, n abhängt.

ii) Ist $k > \frac{n}{p}$, so ist $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{\Omega})$

Es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{H^{k,p}(\Omega)}$$

wobei C nur von k, p, n, γ, Ω abhängt.

Bez.: Hierbei ist $C^r(\bar{\Omega})$ der (Banach-)Raum der C^r-Fkt. u auf Ω f. die $\partial^\alpha u$ f. alle $|\alpha| \leq r$ auf Ω beschränkt ist. Mit der Norm $\|u\|_{C^r(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq r} \sup_{x \in \Omega} |(\partial^\alpha u)(x)|$

sind dies Banachräume.

Bew.: Vergl. Evans PDE Th. 6 in 5.7 auf S. 270

Man zeigt zunächst f. C^∞-Fkt. in $H^{k,p}(\Omega)$ die genannten Abschätzungen. Zu $u \in H^{k,p}(\Omega)$ wähle $u_n \in H^{k,p}(\Omega) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $u_n \to u$ in $H^{k,p}(\Omega)$. Die Abschätzg. zeigen, daß die u_n's in $L^q(\Omega)$ bzw. $C^{k-[\frac{n}{p}]-1}(\bar{\Omega})$ Cauchy-Folgen also konvergent sind. Also ist $u \in L^q(\Omega)$ bzw. $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1}(\bar{\Omega})$. Letztere Aussage bedeutet genauer: In der f.ü. Äquivalenzklasse von u gibt es einen $C^{k-[\frac{n}{p}]-1}(\bar{\Omega})$-Vertreter (der mit. eind. ist).

Wir brauchen nur folgenden Spezialfall von (7.5) ii)

Kor.: Sei $u \in H^k(\Omega)$ und $k > \frac{n}{2}$. Dann ist $u \in C^{k-[\frac{n}{2}]-1}(\bar\Omega)$ und es gibt für eine Konstante $C \geq 0$:

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{2}]-1}(\bar\Omega)} \leq C \, \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Bew. für $n = 1$, $k = 1$: Wie bemerkt, genügt es ein C zu finden, so daß für alle $u \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{C^0(\bar\Omega)} \leq C \, \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Wir betrachten nur den Fall, daß $\Omega = (a,b)$ ist. Für $x, y \in \Omega$ gilt $|u(x)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(y)|$. Integration nach y gibt $(b-a)|u(x)| \leq \int_\Omega |u(x)-u(y)|\, dy + \int_\Omega |u(y)|\, dy$. Es ist $|u(x) - u(y)| \leq \left|\int_y^x |u'(t)|\, dt\right| \leq \int_\Omega |u'(t)|\, dt$. Mit Cauchy-Schwarz folgt $|u(x)| \leq C_1\left(\int_\Omega \|u'\|_{L^2}\, dy + \|u\|_{L^2}\right) \leq C_2\left(\|u'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\right) \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ $\Rightarrow$ Beh.

(7.6) Kor.: (C^∞-Regularität im Innern)

Seien $a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lösg. der elliptischen PDGL

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega.$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Bew.: Aufgrund von Satz 7.4 angewandt auf $\Omega'' \subset\subset \Omega$, gilt für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, daß $u \in \bigcap_{k \geq 0} H^k(\Omega') = C^\infty(\Omega')$.

Solche Ω''s überdecken Ω also ist $u \in C^\infty(\Omega)$.

Eigenfunktionen und Eigenwerte

Sei $Lu = -\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j}$

wobei $A = (a^{ij})$, $a^{ij} \in C^\infty(\bar\Omega)$, $a^{ij} = a^{ji}$ d.h. A ist positiv symmetrisch und es gelte f. ein $\gamma > 0$

$$\langle A\xi, \xi\rangle \geq \gamma |\xi|^2 \text{ f. } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ auf } \Omega.$$

Wir interessieren uns f. das Randwertproblem

$$Lw = \lambda w \quad \text{in } \Omega$$

$$w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit $w \in H^1(\Omega)$; d.h. f.

$$Lw = \lambda w \quad \text{und} \quad w \in H_0^1(\Omega).$$

alles im schwachen Sinne!

Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ f. die eine Lösung $0 \neq w \in H_0^1(\Omega)$ ex., heißen Eigenwerte von L. Die entspr. w's heißen Eigenfunktionen.

Hier gilt der folgende Satz

<u>(7.7) Satz</u>: Die Menge der Eigenwerte ist abzählbar. Jeder Eigenwert λ hat endliche Vielfachheit:

$$m_\lambda := \dim_{\mathbb{R}} \{ w \in H_0^1(\Omega) \mid Lw = \lambda w \} < \infty$$

Ist $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Folge der Eigenwerte (wobei λ, m_λ-mal wiederholt wird), so gilt $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Es gibt eine Orthonormalbasis $(w_k)_{k \geq 1}$ von $L^2(\Omega)$ wobei $w_k \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ Eigenfunktion zum Eigenwert λ_k ist.

<u>Bem.</u>: Aus der Regularitätstheorie folgt, daß Eigenfunktionen $w_k \in H_0^1(\Omega)$ automatisch in $C^\infty(\Omega)$ sind.

Bem.: $(w_n)_{n\geq 1}$ ist eine ON-Basis des Hilbertraumes H wenn gilt:

1) $(w_n, w_m) = 0$ f. $n \neq m$ und $(w_n, w_n) = 1$

2) Jedes $w \in H$ besitzt eine Darstellung durch eine in H konvergente Reihe:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n \text{ .}$$

Dabei sind die a_n eind. bestimmt: Es gilt $a_k = (w, w_k)$

(denn $(w, w_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w_n, w_k) = a_k$. Beachte $(-, w_k)$ ist stetig vertauscht also mit Σ)

Es gilt dann die Parsevalsche Gleichung

$$\|w\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

(denn $\|w\|^2 = (w, w) = \sum_{n,m} a_n a_m (w_n, w_m) = \sum_n a_n^2$)