6. Energiemethoden

Wir wollen das Dirichlet Prinzip aus Satz 3.7 ausbauen um (schwache) Lösungen des Dirichlet Problems $-\Delta u = f,\ u|_{\partial\Omega} = g$ zu erhalten.

Hierzu brauchen wir folgende wichtige Ungleichung f. $p=2$

<u>6.1 Satz</u> (Poincaré Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es ein $C_0 = C_0(\Omega, p) > 0$ mit

$$\int_\Omega |u|^p \, d\lambda \le C_0 \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p \, d\lambda \qquad \text{f. } u \in H_0^{1,p}(\Omega).$$

<u>Beweis</u> Sei zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Schreibe $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, $x = (\tilde{x}, y)$.

Da Ω beschr. ist, gilt $\Omega \subset Q \times (a,b)$ f. $a<b$ reell und $Q \subset \mathbb{R}^{d-1}$ beschränkt. Es gilt

$$u(\tilde{x}, y) = \int_a^y \partial_d u(\tilde{x}, z)\, dz \qquad \text{da } u(\tilde{x}, a) = 0.$$

Die Hölder-Ungleichg.

$$|uv|_1 \le \|u\|_p \, \|v\|_q \qquad \text{f. } u \in L^p, v \in L^q, \ 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

f. $u = u(\tilde{x}, -)$ und $v = 1$ liefert:

$$|u(\tilde{x}, y)|^p \le \left(\int_a^b |\partial_d u(\tilde{x}, z)|\, dz \right)^p \le$$

$$\underset{\text{Hölder f. } v=1}{\le} \int_a^b |\partial_d u(\tilde{x}, z)|^p dz \underbrace{\left(\int_a^b 1 \, dz \right)^{p/q}}_{C(a,b,p)}$$

Also

$$\int_a^b |u(\tilde{x},y)|^p dy \leq (b-a)C(a,b,p) \int_a^b |\partial_d u(\tilde{x},z)|^p dz$$

und daher:

$$\int_\Omega |u|^p d\lambda \leq \int_Q \int_a^b |u(\tilde{x},y)|^p dy\, d\tilde{x}$$

$$\leq C'(a,b,p) \int_Q \int_a^b |\partial_d u(\tilde{x},z)|^p dz\, d\tilde{x}$$

$$\leq C'(a,b,p) \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p d\lambda .$$

Für allgemeines $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ wähle eine Folge u_n in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$. Das geht, denn nach Def. 186 $H_0^{1,p}(\Omega)$ der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^{1,p}(\Omega)$.

Für $F(u) := \int_\Omega |u|^p d\lambda$ und $G(u) = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p d\lambda$ haben wir gezeigt:

$$F(u_n) \leq C_0\, G(u_n) \quad \text{f. alle } n \geq 1.$$

Da $F, G : H^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ stetig sind ($F(u)^{1/p} = \|u\|_{L^p}$ und $|\|u\|_{L^p} - \|v\|_{L^p}| \leq \|u-v\|_{L^p} \leq \|u-v\|_{H^{1,p}}$, analog f. G)

folgt $F(u) \leq C_0\, G(u)$ f. alle $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$, wie behauptet.

Bem.: Wir brauchen gleich die simple "ε-Ungleichung"

$$AB \leq \varepsilon^2 A^2 + \varepsilon^{-2} B^2 \quad \text{f. alle } A, B \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$$

Bew.: Aus $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ folgt mit $a = \varepsilon A$, $b = \varepsilon^{-1} B$
$AB \leq \frac{1}{2}(\varepsilon^2 A^2 + \varepsilon^{-2} B^2) \Rightarrow$ Beh.

Bez.: Wir setzen $H^p(\Omega) := H^{p,2}(\Omega)$.

Es gilt nun der folgende Existenzsatz:

(6.2) Satz Sei Ω beschränktes Lipschitz Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in \operatorname{Im}(S : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega))$. Dann nimmt das Energiefunktional

$$E : X_g \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\operatorname{grad} u|^2 - fu\right) d\lambda$$

auf

$$X_g = \{u \in H^1(\Omega) \mid S(u) = g\} \quad (\neq \emptyset\,!)$$

ein Minimum u_0 an, d.h.

$$E(u_0) = \inf_{u \in X_g} E(u).$$

Für ein solches $u_0 \in H^1(\Omega)$ gilt

$$-\Delta u_0 = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

und $\quad u_0|_{\partial\Omega} = g \quad$ in dem Sinne, daß $S(u_0) = g$ ist.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß $\inf_{u \in X_g} E(u) > -\infty$ ist.

Wähle ein $G \in H^1(\Omega)$ mit $S(G) = g$. Dann gilt

$$X_g = \{u = G + v \mid v \in H^1_0(\Omega)\}.$$

Wir haben:

$$\int_\Omega fu\, d\lambda \le \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\left(\|G\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\right)$$

$$\underset{\uparrow}{\le} \|f\|_{L^2} \|G\|_{L^2} + C_1 \|f\|_{L^2} \|\operatorname{grad} v\|_{L^2}$$

Poincaré-Ungl. $C_1 = C_0(\Omega, 2)^{1/2}$
für v

Also wegen $\| \operatorname{grad} v \|_{L^2} \le \| \operatorname{grad} G \|_{L^2} + \| \operatorname{grad} u \|_{L^2}$

$$\int_\Omega f u \, d\lambda \le C(f,G) + C(f) \, \| \operatorname{grad} u \|_{L^2} .$$

Für die Energie erhalten wir:

$$E(u) \ge \frac{1}{2} \| \operatorname{grad} u \|_{L^2}^2 - \Big| \int_\Omega f u \, d\lambda \Big|$$

$$\ge \frac{1}{2} \| \operatorname{grad} u \|_{L^2}^2 - C_2 - C_3 \, \| \operatorname{grad} u \|_{L^2}$$

2-Ungl.
$\varepsilon = 1/2$
$a = \|\operatorname{grad} u\|$
$b = C_3$

$$\ge \frac{1}{2} \| \operatorname{grad} u \|_{L^2}^2 - C_4 - \frac{1}{4} \| \operatorname{grad} u \|_{L^2}^2$$

$$= \frac{1}{4} \| \operatorname{grad} u \|_{L^2}^2 - C_4$$

$$\ge - C_4 .$$

Also ist $\inf_{X_g} E \ge - C_4 > - \infty$.

Wähle nun eine Minimalfolge $u_k \in X_g$ mit

$$E(u_k) \to \inf_{X_g} E.$$

Da X_g nach Vor. über g nicht leer ist, ex. so eine Folge (u_k). Wir zeigen jetzt, daß (u_k) eine Cauchy-Folge in $H^1(\Omega)$ ist, also in $H^1(\Omega)$ konvergiert:

Es gilt:

$$\| \operatorname{grad}(u_k - u_m) \|_{L^2}^2 = - \| \operatorname{grad}(u_k + u_m) \|_{L^2}^2 + 2 \| \operatorname{grad} u_k \|_{L^2}^2 + 2 \| \operatorname{grad} u_m \|_{L^2}^2$$

(aufgrund der Parallelogrammgleichung, die in jedem Hilbertraum gilt: $\| u+v \|^2 + \| u-v \|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$)

Wir erklären die Energie E auf ganz $H^1(\Omega)$ durch dieselbe Formel wie oben:

$$E(u) = \frac{1}{2} \| \operatorname{grad} u \|^2_{L^2} - \int_\Omega u f \, d\Omega .$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\| \operatorname{grad} (u_k - u_m) \|^2_{L^2} &= -2\, E(u_k + u_m) - 2 \int_\Omega (u_k + u_m) f \, d\Omega \\
&\quad + 4\, E(u_k) + 4 \int_\Omega u_k f \, d\Omega \\
&\quad + 4\, E(u_m) + 4 \int_\Omega u_m f \, d\Omega \\
&= -8\, E\left(\frac{u_k + u_m}{2} \right) + 4 E(u_k) + 4 E(u_m) \\
&\le -8 \inf_{X_g} E + 4 E(u_k) + 4 E(u_m).
\end{aligned}$$

da $\frac{u_k + u_m}{2} \in X_g$

Es gilt $u_k - u_m \in H^1_0(\Omega)$ (da $S(u_k) = S(u_m) = g$) und daher folgt aus der Poincaréschen Ungl.:

$$\| u_k - u_m \|^2_{H^1} \le C_0 \| \operatorname{grad}(u_k - u_m) \|^2_{L^2} \le 4\left(E(u_k) - \inf_{X_g} E \right) + 4\left(E(u_m) - \inf_{X_g} E \right).$$

Da $E(u_n) \to \inf_{X_g} E$ nach Wahl der Folge u_n gilt, ist (u_n) also eine Cauchy-Folge in der H^1-Norm. Sei $u_0 := \lim_{n \to \infty} u_n \in H^1(\Omega)$.

Prop. Sei $T : V \to W$ lineare Abb. normierter Räume. Dann ist T genau dann stetig, wenn ein $C \geq 0$ ex. mit

(*) $\|Tv\| \leq C\|v\|$ f. alle $v \in V$. ["T ist beschränkter Operator"]

In diesem Fall setzt man

$$\|T\| = \inf C \qquad \text{(Operatornorm)}$$

und es gilt

$$\|T\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\| .$$

Bew.: Es ist klar, daß (*) $\Rightarrow$ T stetig.
Sei T stet. Dann ex. $\varepsilon > 0$ mit $T(U_\varepsilon(0)) \subset U_1(0)$.
Für $v \neq 0$ gilt also

$$\left\| T\left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \leq 1$$

d.h.

$$\|T(v)\| \leq \frac{2}{\varepsilon}\|v\|$$

also (*) f. $C = 2/\varepsilon$. Für $v = 0$ ist (*) trivial.

Für $\|v\| \leq 1$ gilt $\|T(v)\| \leq \|T\|$. Also ist $\underbrace{\sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\|}_{=: D} \leq \|T\|$.
Andererseits gilt f. $v \neq 0$

$$\|T(v)\| = \left\|T\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\| \|v\| \leq D\|v\|$$

also $\|T\| \leq D$. Also $\|T\| = D$.

Bem.: Mit der Operatornorm wird $L(V,W) := \mathrm{Hom}_{\text{stet}}(V,W)$ ein normierter VR (leicht). Ist W ein Banachraum, so auch $L(V,W)$. Insbesondere ist der Dualraum $V^* = L(V,\mathbb{R})$ eines normierten VR stets ein Banachraum.

Da $X_g \subset H^1(\Omega)$ abgeschlossen ist (da der Spuroperator S stetig ist) folgt $u_0 \in X_g$.

Wir zeigen jetzt, daß $-\Delta u_0 = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gilt:

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann liegt $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon\varphi$ in X_g.

Also hat $\varepsilon \mapsto E(u_\varepsilon)$ bei $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Diese Fkt. ist nach ε diffbar und daher folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(E(u_\varepsilon)) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \int_\Omega \frac{1}{2}|\operatorname{grad}(u_0+\varepsilon\varphi)|^2 - f(u_0+\varepsilon\varphi)\, d\lambda$$

$$= \int_\Omega \langle \operatorname{grad} u_0, \operatorname{grad}\varphi \rangle - f\varphi \, d\lambda$$

$$= -\int_\Omega u_0 \Delta\varphi \, d\lambda - \int_\Omega f\varphi \, d\lambda$$

Kor. 4.28 (2)
(Green)

$$= -(\Delta\langle u_0\rangle)(\varphi) - \langle f\rangle(\varphi).$$

Also gilt

$$-\Delta\langle u_0\rangle = \langle f\rangle$$

wobei $\langle u_0\rangle, \langle f\rangle$ die zu u_0, f assoz. Distrib. in $\mathcal{D}'(\Omega)$ sind.

Die Energiemethode liefert auch folgendes Resultat, das wir benutzen werden um allgemeinere PDGL zu lösen:

<u>(6.3) Satz</u> (Verallgemeinerter Rieszscher Darstellungssatz) Sei H ein Hilbertraum, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine symmetrische stetige Bilinearform, die "koerziv" (besser: "positiv definit") ist, d.h. ex. $C_0 > 0$ mit:

$$\|u\|^2 \leq C_0 \, a(u,u) \quad \text{f. } u \in H.$$

Weiterhin sei $F : H \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann gibt es genau ein $u \in H$ mit

$$F(v) = a(u, v) \quad \text{f. alle } v \in H.$$

<u>Bem.</u>: Der klassische Satz von Riesz betrifft den Fall $a(u,v) = (u,v)$. Jedes F hat die Darstellung $F(v) = (u,v)$ mit einem eind. $u = u_F \in H$. Man erhält einen Vektorraum-Isomorphismus

$$R : H \xrightarrow{\sim} H^* := \mathrm{Hom}_{\text{stet}}(H, \mathbb{R})$$
$$u \longmapsto (v \mapsto (u,v)).$$

Für einen Banachraum B ist $B^* = \mathrm{Hom}_{\text{stet}}(B, \mathbb{R})$ mit der Norm

$$\|\varphi\| = \sup_{\|b\| \leq 1} |\varphi(b)| \qquad \text{f. } \varphi \in B^*$$

$$= \inf \{ C \geq 0 \mid |\varphi(u)| \leq C \|u\| \}$$

wieder ein Banachraum. Die Abbildung $R : H \xrightarrow{\sim} H^*$ ist eine Isometrie, d.h. $\|R(u)\| = \|u\|$ f. alle $u \in H$, denn:

$$\|R(u)\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |R(u)(v)| = \sup_{\|v\| \leq 1} |(u,v)| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sup_{\|v\| \leq 1} \|u\| \|v\| = \|u\|$$

Wegen $R(u)\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|}(u,u) = \|u\|$ f. $u \neq 0$ gilt hier Gleichheit $\|R(u)\| = \|u\|$ (f. $u = 0$ triv.).

Bew.: Eind.: Sei $F(v) = a(u,v) = a(u',v)$ f. $v \in H$.

Dann gilt $a(u-u',v) = 0$, also speziell f. $v = u-u'$

$\|u-u'\|^2 \leq C_0\, a(u-u', u-u') = 0$, also $u = u'$.

Ex.: Das gesuchte u mit $F(v) = (u, v)$ wird sich als Minimum des Energiefunktionals ergeben:

$$E : H \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \tfrac{1}{2} a(v,v) - F(v).$$

Die Energie ist nach unten beschränkt, denn:

$$E(v) \geq \frac{1}{2C_0}\|v\|^2 - \|F\|\,\|v\| \qquad \left(F \text{ stet.} \Rightarrow |F(v)| \leq \|F\|\,\|v\| \right)$$

$$\geq \frac{1}{2C_0}\|v\|^2 - \frac{1}{2C_0}\|v\|^2 - C_1 \geq -C_1$$

ε-Ungl.
mit $A = \|v\|$
$B = \|F\|$
$\varepsilon^2 = \frac{1}{2C_0}$

Sei (u_k) Minimalfolge, d.h. $u_k \in H$ und

$$\lim_{k\to\infty} E(u_k) = \inf E.$$

Dann u_k Cauchy-Folge in H, denn es gilt:

$$a(u_k - u_m, u_k - u_m) = -a(u_k + u_m, u_k + u_m) + 2a(u_k,u_k) + 2a(u_m,u_m)$$

$$= -8\,E\left(\frac{u_k+u_m}{2}\right) + 4E(u_k) + 4E(u_m)$$

$$\leq -8 \inf E + 4E(u_k) + 4E(u_m).$$

Also folgt:

$$\|u_k - u_m\|^2 \leq C_0\, a(u_k-u_m, u_k-u_m) \leq 4(E(u_k) - \inf E) + 4(E(u_m) - \inf E)$$

und daher ist (u_k) eine Cauchy-Folge in H, also konv.

Setze $u := \lim_{k\to\infty} u_k$ in H. Für bel. $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt da $E(u)$ minimal ist f. bel. $v \in H$

$$E(u) \leq E(u+\varepsilon v) = E(u) + \varepsilon a(u,v) - \varepsilon F(v) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v)$$

$$= E(u) + \varepsilon a(u,v) - \varepsilon F(v) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v)$$

a symmetrisch

Für $\varepsilon > 0$ erhalten wir durch Teilen durch ε

$$0 \leq a(u,v) - F(v) + \frac{\varepsilon}{2} a(v,v)$$

Mit $\varepsilon \to 0+$ folgt

$$0 \leq a(u,v) - F(v)$$

Für $\varepsilon < 0$ folgt analog

$$0 \geq a(u,v) - F(v),$$

insges. also die Beh.

Wir werden jetzt die Randwertaufgabe

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

sogar in etwas allgemeinerer Form als Anwendung des verallg. Rieszschen Darstellungssatzes behandeln.

Wir hatten im Satz (6.2) gezeigt, daß zu $g \in \mathrm{Im}(S : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega))$ ein $u_0 \in H^1(\Omega)$ ex. mit

$$-\Delta u_0 = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{und} \quad u_0|_{\partial\Omega} = g.$$

Wie am Ende des Beweises von (6.2) gesehen war dies äquiv. zu der Gleichung f. $u_0 \in H^1(\Omega)$ mit $S(u_0) = g$:

$$(*) \quad \int_\Omega \langle \operatorname{grad} u_0, \operatorname{grad} \varphi \rangle \, d\lambda = \int_\Omega f\varphi \, d\lambda \quad \text{f. alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Diese Gleichung gilt allgemeiner für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$:

Da $\operatorname{grad} u_0$, $\operatorname{grad}\varphi \in L^2$ sind, ist nach Cauchy-Schwarz $\langle \operatorname{grad} u_0, \operatorname{grad}\varphi\rangle$ integrierbar. Wegen $f, \varphi \in L^2$ ist auch $f\varphi$ integrierbar.

Die Abbildung

$$\langle f\rangle : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \quad , \langle f\rangle(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, d\lambda$$

ist stetig wegen:

$$|\langle f\rangle(\varphi)| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2 \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_{H_0^1} .$$

Weiterhin ist die Abb.

$$H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \, , \quad \varphi \mapsto \int_\Omega \langle \operatorname{grad} u_0, \operatorname{grad}\varphi\rangle \, d\lambda$$

stetig wegen

$$\left| \int_\Omega \langle \operatorname{grad} u_0, \operatorname{grad}\varphi\rangle d\lambda \right| \leq \|\operatorname{grad} u_0\|_{L^2} \|\operatorname{grad}\varphi\|_{L^2}$$

$$\leq \|\operatorname{grad} u_0\|_{L^2} \|\varphi\|_{H_0^1} .$$

Da beide Seiten von $(*)$ stetig in $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ sind und $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt, gilt $(*)$ für alle $H_0^1(\Omega)$ d.h.

$$(**) \quad \int_\Omega \langle \operatorname{grad} u_0, \operatorname{grad}\varphi\rangle \, d\lambda = \langle f\rangle(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Statt des speziellen Funktionals $\langle f\rangle \in H^{-1}(\Omega)$ können wir diese Gleichung auch für ein bel. $F \in H^{-1}(\Omega)$ betrachten und definieren daher:

Def.: Sei Ω offen, beschränkt im $\mathbb{R}^d$. Sei $G \in H^1(\Omega)$ und $F \in H^{-1}(\Omega)$. Dann heißt $u_0 \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$-\Delta u_0 = F \quad , \quad u_0 = G \text{ auf } \partial\Omega$$

falls $u_0 - G \in H_0^1(\Omega)$ ist, und falls f. alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad} u_0 , \operatorname{grad} \varphi \rangle \, d\lambda = F(\varphi) .$$

!

Bem.: 1) Da man Hilbertraummethoden benutzt, ist es besser mit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ statt $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ zu arbeiten und man def. schwache Lösungen also entsprechend

2) Die Formulierung $u_0 - G \in H_0^1(\Omega)$ f. $u = G$ auf $\partial\Omega$ ist allgemeiner als die bisherige, die den Spur Operator benutzte und daher ein Lipschitz Gebiet voraussetzte.

(6.4) Satz Sei Ω offen beschränkt, $G \in H^1(\Omega)$ und $F \in H^{-1}(\Omega)$. Dann ex. genau eine schwache Lösg. von:

$$-\Delta u_0 = F \quad , \quad u_0 = G \text{ auf } \partial G .$$

Bew.: Sei $H = H_0^1(\Omega)$ und $a(u,\varphi) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\varphi)_{L^2(\Omega)}$

$$\| \quad \int_\Omega \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\varphi \rangle \, d\lambda$$

f. $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Nach der Poincaréschen Ungleichung ist die symmetrische Bilinearform $a : H \times H \to \mathbb{R}$ koerziv, d.h. es ex. ein $C > 0$ mit

$$\| u \|_{H_0^1}^2 \le C \, a(u,u) \quad \text{f. alle } u \in H_0^1 .$$

Die folgende lineare Abbildung $\tilde{F} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist nach Cauchy-Schwarz stetig:

$$\tilde{F}(\varphi) = F(\varphi) - (\operatorname{grad} G, \operatorname{grad} \varphi)_{L^2} .$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz ex. also genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $a(u,\varphi) = \tilde{F}(\varphi)$ f. alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

d.h.

$$(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\varphi)_{L^2} = F(\varphi) - (\operatorname{grad} G, \operatorname{grad}\varphi)_{L^2}$$

d.h.

$$(\operatorname{grad}(u+G), \operatorname{grad}\varphi)_{L^2} = F(\varphi).$$

Für $u_0 = u + G \in H^1(\Omega)$ gilt $u_0 - G \in H_0^1(\Omega)$ sowie

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad} u_0, \operatorname{grad}\varphi\rangle \, d\lambda = F(\varphi) \quad f.\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Also ist u_0 schwache Lösg. Ist $\tilde{u}_0$ eine weitere schwache Lösg., so erfüllt $u = u_0 - \tilde{u}_0 = (u_0 - G) - (\tilde{u}_0 - G) \in H_0^1(\Omega)$ die Gleichung $a(u_0 - \tilde{u}_0; \varphi) = 0$ f. alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.
Wegen der Koerzivität von a folgt $u_0 = \tilde{u}_0$.

<u>Bem.</u>: Die allgemeine Formulierung des Anfangswertproblems $-\Delta u = F$ mit einem Funktional F erlaubte es, die Anfangsbedg. $u = G$ auf $\partial\Omega$ i.e. $u - G \in H_0^1(\Omega)$ durch ein modifiziertes F, das $\tilde{F}$ zu behandeln. Statt auf einem affinen Raum (X_g) konnte man so direkt im Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$ arbeiten.

Ebenso leicht kann man die Existenz schwacher Lösungen f folgenden Typ allgemeiner PDGL zeigen, die z. B. in der Wärmeleitungstheorie bei nicht konstanter Leitfähigkeit auftreten:

Betrachte meßbares

$$A : \Omega \to M_d(\mathbb{R}) \quad \text{mit beschränkten Komponenten}$$

also $A \in L^\infty(\Omega, M_d(\mathbb{R})) = M_d(L^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$ f die $\gamma > 0$ ex. mit

$$(6.5) \quad \langle A\xi, \xi \rangle \geq \gamma |\xi|^2 \qquad \text{f alle } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Wir wollen das Anfangsrandproblem

$$-\operatorname{div}(A \cdot \operatorname{grad} u) = f \quad , \quad u|_{\partial G} = g$$

im schwachen Sinne definieren und lösen.

Hierzu betrachte den Operator:

$$L : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

def. durch

$$(Lu)(\varphi) = \int_\Omega \langle A \cdot \operatorname{grad} u , \operatorname{grad} \varphi \rangle \, d\lambda$$

[Grund: Sei $A \in M_d(H^{1,2}(\Omega))$, Ω Lipschitz Rand. Setze $\alpha_i = (A \operatorname{grad} u)_i \Rightarrow$

$$\int_\Omega \langle A \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \varphi \rangle d\lambda = \int_\Omega \sum_i \alpha_i \partial_i \varphi \, d\lambda$$

$$\underset{\substack{\text{Gauß: 4.27(2)} \\ \text{Randterme} = 0}}{=} -\int_\Omega \Big(\sum_i \partial_i \alpha_i \Big) \varphi \, d\lambda$$

$$= - \int_\Omega \operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) \, \varphi \, d\lambda .$$

Unter diesen stärkeren Bedingungen ist also $Lu = -\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u)$ im Distributionensinne]

(6.6) Satz: Sei Ω offen beschränkt im $\mathbb{R}^d$, $F \in H^{-1}(\Omega)$ und $G \in H^1(\Omega)$. Falls das beschränkte "Matrixfeld" $A : \Omega \to M_d(\mathbb{R})$ punktweise symmetrisch ist (d.h. $A(x)^* = A(x)$ für alle $x \in \Omega$) und die "Elliptizitätsbdg." (6.5) für ein $\delta > 0$ genügt, so gibt es genau ein $u_0 \in H^1(\Omega)$ mit

(*) $\quad L u_0 = F \quad$, sowie $\; u_0 - G \in H^1_0(\Omega)$.

Beweis Wie oben betrachte $\tilde F \in H^{-1}(\Omega)$ def. durch

$$\tilde F = F - LG$$

Eine Lösung $u \in H^1_0(\Omega)$ von $Lu = \tilde F$ liefert durch $u_0 := u + G$ eine Lösg. von (*) und umgekehrt.

Indem wir F statt $\tilde F$ schreiben genügt es also z.z.: es ex. genau ein $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ mit $L u_0 = F$.

Betrachte die Bilinearform $a : H \times H \to \mathbb{R}$ mit

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle A \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle \, d\lambda = (Lu)(v) .$$

Wegen Elliptizität von A gilt λ-f.ü. auf Ω:

$$\langle A \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u \rangle \geq \delta \, |\operatorname{grad} u|^2$$

Also gilt

$$\|u\|_H^2 = \|u\|_{H^1_0}^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Poincaré}}}{\leq} C \, \|\operatorname{grad} u\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\delta} \, a(u,u) .$$

Also ist die symmetrische stb. Bil. Form $a(u,v)$ koerziv. Der verallg. Rieszsche Darstellgssatz liefert also eine eind. $u_0 \in H$ mit $a(u_0, \varphi) = F(\varphi)$ für alle $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ d.h. $L u_0 = F$.

Letztlich ist man an folgendem allgemeinen Typ (elliptischer) PDGL 2. Ordnung interessiert:

Für $A \in L^\infty(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$, $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d) = L^\infty(\Omega)^d$ und $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ möchte man das Anfangswertproblem

$$-\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u_0) + \langle b, \operatorname{grad} u_0 \rangle + c u_0 = F \quad \text{in } \Omega$$

(6.7)

$$u_0 = G \quad \text{auf } \partial\Omega$$

lösen. Man betrachtet wieder eine schwache Formulierung.

Sei a die folgende Bilinearform auf $H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) := \int_\Omega \langle A \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle + \langle b, \operatorname{grad} u \rangle v + c u v \, d\lambda$$

Sie ist i.a. nicht symmetrisch wegen dem "b-Teil".

(6.8) Bez.: Ein $u_0 \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Anfangswertproblems (6.7) zu $G \in H^1(\Omega)$, $F \in H^{-1}(\Omega)$, falls $u_0 - G \in H^1_0(\Omega)$ ist und für alle $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ gilt:

$$a(u_0, \varphi) = F(\varphi).$$

In diesem Zusammenhang ist der folgende Satz relevant:

(6.9) Satz (Lax-Milgram) Sei H ein (reeller) Hilbertraum und $a: H \times H \to \mathbb{R}$ Bilinearform mit

$$\|u\|^2 \le C_0 |a(u,u)|$$

sowie $|a(u,v)| \le C_1 \|u\| \|v\|$ für alle $u, v \in H$. Dann ex. für jedes $F \in H^*$ genau ein $u = u_F \in H$ mit:

$$F(\varphi) = a(u, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in H.$$

Es gilt $\|u_H\| \le C_0 \|F\|_{H^*}$.

Bew.: Falls u gefunden ist, so folgt aus $F(\varphi)=a(u,\varphi)$ f. $\varphi=u$ daß

$$\|u\|^2 \le C_0|a(u,u)| = C_0|F(u)| \le C_0\|F\|_{H^*}\|u\|.$$

Also

$$\|u\| \le C_0\|F\|_{H^*}.$$

Für u' gelte ebenfalls $F(\varphi)=a(u',\varphi)$ f. alle φ. Dann ist $a(u-u',\varphi)=0$ also f. $\varphi=u-u'$:

$$\|u-u'\|^2 \le C|a(u-u',u-u')|=0$$

also $u=u'$ also ist $u=u_F$ eind., falls es ex.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist jedes $F\in H^*$ von der Form $F(\varphi)=(v,\varphi)$ f. ein eind. best. $v\in H$.

Sei also

$$D=\{v\in H \mid \text{ex. } u\in H \text{ mit } (v,\varphi)=a(u,\varphi)\ \forall\varphi\}$$

Wir müssen zeigen, daß $D=H$ ist. Da u durch v eind. best. ist, können wir setzen $u=A(v)$. Es gilt

$$(*)\quad \|A(v)\| = \|u\| \le C_0\|\underset{H^*}{\underset{\cap}{(v,-)}}\|_{H^*} = C_0\|v\|.$$

Isometrieaussage aus Rieszschem Darstellungssatz.

Die Menge D ist ein Untervektorraum von H und $A: D\to H$ ist eine lin. Abb., die nach $(*)$ beschränkt (i.e. stetig) ist.

[z.B. seien $v_1, v_2\in D$. Dann ist $(v_i,\varphi)=a(u_i,\varphi)$ $\forall\varphi$ also $(v_1+v_2,\varphi)=a(u_1+u_2,\varphi)$. Also gilt $v_1+v_2\in D$ sowie $A(v_1+v_2)=u_1+u_2=Av_1+Av_2$]

Bew. D ist abgeschlossen.

Sei $v_n \in D$ Folge mit $v_n \to v \in H$. Dann ist

$$\| A v_n - A v_m \| = \| A(v_n - v_m) \| \leq C_0 \| v_n - v_m \|$$

Mit (v_n) ist also auch (Av_n) Cauchy-Folge, also in H konvergent. Sei $u = \lim_{n \to \infty} A v_n$. Aus den Gleichungen

$$(v_n, \varphi) = a(Av_n, \varphi)$$

folgt durch $n \to \infty$ f. alle φ

$$(v, \varphi) = a(u, \varphi), \qquad (\text{beachte: } |a(u,v)| \leq C_1 \|u\| \|v\|)$$

Also ist $v \in D$ und D daher ein abgeschlossener Unterraum von H. Folglich gilt:

$$H = D \oplus D^\perp$$

wobei $D^\perp = \{ h \in H \mid (v, h) = 0 \text{ f. alle } v \in D \}$

der Orthogonalraum von D ist.

(Grundlegende Tatsache über Hilberträume → jedes Funktionalanalysisbuch)

Sei $h \in D^\perp$. Das stetige lineare Funktional

$$\varphi \mapsto a(h, \varphi)$$

hat nach Riesz die Darstellung:

$$a(h, \varphi) = (w, \varphi) \quad \text{f. alle } \varphi$$

f. ein eind. $w \in H$. Es ist also $w \in D$.

Folglich gilt

$$\|h\|^2 \leq C_0 |a(h,h)| = C_0 |(w, h)| = 0 \quad \text{da } w \in D \text{ und } h \in D^\perp.$$

Also ist $h = 0$, also $D^\perp = 0$ also $D = H$ wie behauptet.

(6.10) Korollar (Lösung des allg. elliptischen Problems)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen beschränkt, $F \in H^{-1}(\Omega)$ und $G \in H^1(\Omega)$. Das Matrixfeld $A \in L^\infty(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$ genüge der Elliptizitätsbedg.:

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \gamma |\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d,\ x \in \Omega$$

mit einem $\gamma > 0$. Weiter sei $b \in C^1(\bar\Omega, \mathbb{R}^d)$ sowie $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c - \frac{1}{2}\operatorname{div}(b) \geq 0$ in Ω. Dann besitzt die schwache Version (6.8) des Anfangswertproblems

$$-\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u_0) + \langle b, \operatorname{grad} u_0\rangle + c u_0 = F \quad \text{in } \Omega$$

$$u_0 = G \quad \text{auf } \partial\Omega$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $u_0 \in H^1(\Omega)$.

Bew.: Sei a folgende Bilinearform auf $H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle A \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + \langle b, \operatorname{grad} u\rangle v + c u v \, d\lambda.$$

Wir müssen zeigen, daß ein eind. $u_0 \in H^1(\Omega)$ ex. für das $u_0 - G \in H_0^1(\Omega)$ ist und für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$a(u_0, \varphi) = F(\varphi).$$

Leichte Abschätzungen zeigen, daß ein C_1 ex. mit

$$|a(u,v)| \leq C_1 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

Insbesondere ist mit F auch die Linearform

$$\tilde F(\varphi) = F(\varphi) - a(G,\varphi)$$

stetig. Eine Lösg. $u \in H_0^1(\Omega)$ von

$$a(u,\varphi) = \tilde F(\varphi)$$

liefert durch $u_0 = u + G$ also eine Lösg. unseres Problems und umgekehrt. Indem wir F statt $\tilde F$ schreiben müssen wir also zeigen, daß für jedes $F \in H^{-1}(\Omega)$ genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ ex. mit

$$a(u,\varphi) = F(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Das folgt aus dem Satz von Lax-Milgram für $H = H_0^1(\Omega)$ und die auf H eingeschränkte Bilinearform a. Dazu müssen wir nur noch zeigen, daß ein $C_0 > 0$ ex. mit

$$\|u\|_H^2 \leq C_0 \, |a(u,u)| \quad \text{für alle } u \in H.$$

Es gilt auf ganz Ω

$$\langle A \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u \rangle \geq \gamma \, |\operatorname{grad} u|^2$$

also

$$\int_\Omega \langle A \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u \rangle \geq \gamma \, \|\operatorname{grad} u\|_{L^2}^2 \underset{\text{Poincaré}}{\geq} \gamma' \, \|u\|_H^2 .$$

Andererseits folgt aus

$$\langle b, \operatorname{grad} u \rangle u = \sum_i b_i u \partial_i u = \frac{1}{2} \sum_i b_i \partial_i (u^2) \quad (4.17)$$

mit Satz 4.27 (1) [die wegen $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ und $u^2 \in H_0^{1,1}(\Omega)$ selbst ohne Lipschitz]

$$\int_\Omega \langle b, \operatorname{grad} u \rangle u + c u^2 \, d\lambda = \int_\Omega \left(-\frac{1}{2} \operatorname{div} b\right) u^2 + c u^2 \, d\lambda$$

$$= \int_\Omega \left(-\frac{1}{2} \operatorname{div} b + c\right) u^2 \, d\lambda \geq 0$$

nach Voraussetzung. Also folgt sogar

$$\|u\|_H^2 \leq \frac{1}{\gamma'} \, a(u,u).$$

und wir sind fertig.

Bem.: Die Bdg. sind nicht optimal aber eine Positivitäts-annahme ist selbst für $b=0$ nötig wie sich später zeigt.

§7 Regularitätstheorie elliptischer PDGL

Idee Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $-\Delta u = f$. Dann ist $u \in H^1(\Omega)$.
Für die Ableitg. $\partial_i u$ gilt formal

$$\begin{array}{ccc} -\partial_i \Delta u & = & \partial_i f \in H^{-1}(\Omega) \\ \| & & \uparrow \\ -\Delta \partial_i u & & \text{def. durch } (\partial_i f)(\varphi) = -\int_\Omega f \,\partial_i \varphi \, d\Omega \;\text{ für } \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{array}$$

Also ist $\partial_i u \in H^1(\Omega)$, also $u \in H^2(\Omega)$. "L^2-Regularität".
Allgemeiner sollte gelten $f \in H^p(\Omega) \overset{(*)}{\Rightarrow} u \in H^{p+2}(\Omega)$.
Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz ist

$$\bigcap_{p \geq 1} H^p(\Omega) \subset C^\infty(\Omega) \quad . \quad (\text{wird noch genauer formuliert!})$$

Also würde (*) für eine Ausschöpfung $\Omega' \subset\subset \Omega$ liefern:

$$f \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega).$$

Im folgenden machen wir diese Argumente rigoros. Statt $-\Delta$ betrachten wir allg. ell. PDGL.
Da man schwache Lösg. nicht wie oben differenzieren kann, betrachten wir als Approximation gewisse Differenzenquotienten

Bez.: Für eine Fkt. $u: \Omega \to \mathbb{R}$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ (d.h. $\overline{\Omega'}$ kp. $\subset \Omega$) def. man für $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ ← Abstand von Ω' zu $\partial\Omega$

$$(\partial_i^h u)(x) = \frac{1}{h}\left(u(x+he_i) - u(x)\right) \qquad e_i = (0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0)$$

sowie

$$\operatorname{grad}^h u = (\partial_1^h u, \dots, \partial_n^h u) \qquad (\text{falls } \Omega \text{ offen in } \mathbb{R}^n)$$

Im folgenden sei Ω stets offen beschränkt mit Lipschitz Rand sowie Ω' offen und $\overline{\Omega'}$ kp. in Ω.

(7.1) Satz i) Sei $1 \le p < \infty$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$. Dann ex. ein $C \geq 0$, so daß für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} d(\Omega', \partial\Omega)$ und alle $u \in H^{1,p}(U)$ gilt:

$$\| \operatorname{grad}^h u \|_{L^p(\Omega')} \le C \, \| \operatorname{grad} u \|_{L^p(\Omega)} \qquad (z.B.\ C = n = \dim \Omega)$$

ii) Sei $1 < p < \infty$ und $u \in L^p(\Omega')$, so daß ein $C \geq 0$ ex. mit

$$\| \operatorname{grad}^h u \|_{L^p(\Omega')} \le C \quad \text{für alle } 0 < |h| < \tfrac{1}{2} d(\Omega', \partial\Omega).$$

Dann gilt: $u \in H^{1,p}(\Omega')$ und $\| \operatorname{grad} u \|_{L^p(\Omega')} \le C$.

Bem.: ii) ist falsch für $p = 1$

Bew.: i) Sei $1 \le p < \infty$, u zunächst C^∞. Dann gilt für alle $x \in \Omega'$ $i = 1, \dots, n$ und $0 < |h| < \frac{1}{2} d(\Omega', \partial\Omega)$:

$$u(x + h e_i) - u(x) = \int_0^1 u_{x_i}(x + t h e_i) \, h \, dt,$$

Also ist

$$|u(x+he_i) - u(x)| \le |h| \int_0^1 |\operatorname{grad} u\, (x + t h e_i)| \, dt$$

und folglich:

$$\int_{\Omega'} |\partial_i^h u|^p dx \le \int_{\Omega'} \Big(\int_0^1 | \dots | \Big)^p dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \int_{\Omega'} \int_0^1 |\operatorname{grad} u(x + t h e_i)|^p \, dt \, dx$$

Fubini + Transf.-Formel $\le \int_0^1 \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^p \, dx \, dt$

$$= \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^p dx.$$

Also folgt

(*) $$\int_{\Omega'} |\operatorname{grad}^h u|^p dx \le n^p \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^p dx,$$ also die Beh. mit $C = n$.

Nach Satz 4.24 ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^{1,p}(\Omega)$ dicht in $H^{1,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$. (da Ω Lipschitz) Die Beh. für allg. $u \in H^{1,p}(\Omega)$ folgt jetzt aus (6) durch Grenzübergang: Sei $u_n \to u$, in $H^{1,p}$ mit u_n C^∞. Dann gilt $\operatorname{grad}^h u_n \to \operatorname{grad}^h u$ in $L^p(\Omega')$ (leicht), also

$\|\operatorname{grad}^h u_n\|_{L^p(\Omega')} \to \|\operatorname{grad}^h u\|_{L^p(\Omega')}$. Außerdem gilt

$\operatorname{grad} u_n \to \operatorname{grad} u$ in $L^p(\Omega)$ und daher:

$\|\operatorname{grad} u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|\operatorname{grad} u\|_{L^p(\Omega)}$.

ii) Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ gilt für genügend kleines $h \neq 0$:

$$\int_{\Omega'} u(x)\left(\frac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h}\right)dx \underset{\text{Transformationsformel}}{=} -\int_{\Omega'}\left(\frac{u(x)-u(x-he_i)}{h}\right)\varphi(x)\,dx$$

also ist

$$(7.2) \quad \int_{\Omega'} u\, \partial_i^h \varphi\, dx = -\int_{\Omega'} (\partial_i^{-h} u)\varphi\, dx$$

"Partielle Integration für Differenzen-Operator".

Aus der Abschätzung:

$$\|\operatorname{grad}^h u\|_{L^p(\Omega')} \le C \qquad \text{für } 0 < |h| < \tfrac{1}{2} d(\Omega', \partial\Omega)$$

folgt

$$\sup_h \|\partial_i^{-h} u\|_{L^p(\Omega')} \le C.$$

Da $1 < p < \infty$ ist ex. also eine Fkt $v_i \in L^p(\Omega')$ und eine Teilfolge $h_k \to 0$ mit:

$$\partial_i^{-h_k} u \to v_i \quad \text{in der schwachen Topologie von } L^p(\Omega').$$

Erläuterung Sei E ein Banachraum und E^* sein Dualraum. Die schwache Topologie auf E ist die gröbste Topologie (i.e. wenigste off. Mengen) für die alle $T \in E^*$ stetig sind.
Ein Banachraum E heißt reflexiv, wenn die nat. Abb.

$$E \longrightarrow (E^*)^* \quad , \quad e \longmapsto (T \mapsto T(e))$$

ein Isomorphismus ist.
Ein grundlegender Satz der Funktionalanalysis besagt:

Satz Sei E ein reflexiver Banachraum. Dann besitzt jede Folge (e_n) mit $\|e_n\| \leq C$ eine Teilfolge (e_{n_k}), die in der schwachen Topologie gegen ein $e \in E$ mit $\|e\| \leq C$ konvergiert, d.h. für alle $T \in E^*$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} T(e_{n_k}) = T(e).$$

Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\Omega)$ reflexiv: Die natürliche Paarung

$$L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad 1/p + 1/q = 1$$

$$(f, g) \longmapsto \int_\Omega fg \, d\lambda$$

gibt einen Iso.

$$L^q(\Omega) \xrightarrow{\sim} L^p(\Omega)^*$$

also ist $L^p(\Omega) = L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega)^{**}$.
Insbesondere ex. zu jeder beschränkten Folge (f_n) in $L^p(\Omega)$ mit $\|f_n\|_{L^p} \leq C$ eine Teilfolge (f_{n_k}) und ein $f \in L^p(\Omega)$ mit:

$$\int_\Omega f_{n_k} g \, d\lambda \longrightarrow \int_\Omega fg \, d\lambda$$

für alle $g \in L^q(\Omega)$.

Insbesondere gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ $\left(\subset L^q(\Omega')\right)$, daß

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} (\partial_i^{-h_k} u)\, \varphi \, dx = \int_{\Omega'} v_i \varphi \, dx$$

und daher

$$\int_{\Omega'} u \, \varphi_{x_i} \, dx = \int_{\Omega'} u \lim_{k\to\infty} (\partial_i^{h_k} \varphi) \, dx$$

$$\overset{\text{Lebesgue}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} u \, \partial_i^{h_k} \varphi \, dx$$

$$\overset{(7.2)}{=} - \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} (\partial_i^{-h_k} u)\, \varphi \, dx$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} - \int_{\Omega'} v_i \, \varphi \, dx .$$

Also hat u eine schwache i-te Abl. $v_i \in L^p(\Omega')$ also gilt $\operatorname{grad} u \in L^p(\Omega')$. Wegen $u \in L^p(\Omega')$ folgt $u \in H^{1,p}(\Omega')$. Die Normenabschätzg. für $v = (v_1, \ldots, v_n)$ folgt da $\| \; \| \leq C$ in $L^p(\Omega')^n = L^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$ in der schwachen Top. abgeschlossen ist und $\operatorname{grad}^{-h_k} u \to v$ in der schwachen Top. gilt.

Wir betrachten wieder den Diff. Op.:

$$Lu = -\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) + \langle b, \operatorname{grad} u \rangle + cu$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + c$$

wobei $A = A(x) = (a^{ji}(x))$, $b = b(x) = (b^i(x))$, $c = c(x)$.

Sei

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle A \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle + \langle b, \operatorname{grad} u \rangle v + cuv \, d\Omega$$

Falls A, b, c L^∞ sind def. dies eine Bil.-Form auf $H^1(\Omega)$.
Ist $f \in L^2(\Omega)$ so def. f ein El. von $H^{-1}(\Omega)$ durch $(f, -)_{L^2}$
d.h. durch $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi \, d\Omega$. Nach (6.8) heißt $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösg. von

$$Lu = f$$

falls gilt

$$a(u,\varphi) = (f,\varphi)_{L^2} \text{ f. alle } \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Wir wollen nun unter der Annahme gleichmäßiger Elliptizität von A einen Regularitätssatz f. schwache Lösg. zeigen:

(9.8) Satz (Innere H^2-Regularität) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ off. beschr. Lipschitz, sowie $a^{ij} \in C^1(\Omega)$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Es gelte

(*) $\quad \langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \gamma |\xi|^2$ f. alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$

mit einem $\gamma > 0$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lösung von

$$Lu = f.$$

Dann gilt f. alle offenen $\Omega' \subset\subset \Omega$, daß $u \in H^2(\Omega')$ ist und es gilt die Abschätzung:

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Hierbei hängt C nur ab von Ω', Ω und den Koeff. von L.

<u>Bew.:</u> Zu $\Omega' \subset\subset \Omega$ wähle offenes Ω'' mit $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$.
Sei $\zeta = \zeta(x)$ eine C^∞-Funktion mit $0 \le \zeta \le 1$ und

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \Omega' \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega'' \end{cases}.$$

Da u schwache Lösung von $Lu = f$ ist, gilt

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi)_{L^2} \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Ausgeschrieben

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} \, dx = \int_\Omega \tilde{f} \varphi \, dx$$

wobei $\tilde{f} = f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - c u$.

Für genügend kleines $|h| > 0$ und $1 \le k \le n$ setzen wir:

$$\varphi = -\partial_k^{-h}(\zeta^2 \partial_k^h u) \in H_0^1(\Omega) \quad !$$

in (1) ein, wobei

$$(\partial_k^h u)(x) = \frac{u(x + h e_k) - u(x)}{h}.$$

Setze

$$\alpha := \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j}$$

und

$$\beta := \int_\Omega \tilde{f} \varphi \, dx.$$

<u>Abschätzung von α:</u> Es gilt

$$\alpha = - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} \left[\partial_k^{-h}(\zeta^2 \partial_k^h u)\right]_{x_j} dx$$

also:

$$\alpha \overset{(7.2)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \partial_k^h (a^{ij} u_{x_i}) \, (\zeta^2 \partial_k^h u)_{x_j} \, dx$$

Mit Hilfe der Formel

$$\partial_k^h (fg) = f^h \partial_k^h g + (\partial_k^h f) g$$

wobei

$$f^h(x) = f(x + h e_k)$$

erhalten wir:

$$\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij,h} \, \partial_k^h (u_{x_i}) \, (\zeta^2 \partial_k^h u)_{x_j} +$$

$$+ (\partial_k^h a^{ij}) \, u_{x_i} \, (\zeta^2 \partial_k^h u)_{x_j} \, dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij,h} \, \partial_k^h (u_{x_i}) (\partial_k^h u_{x_j}) \, \zeta^2 \, dx \; +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \Big[a^{ij,h} \, \partial_k^h (u_{x_i}) (\partial_k^h u) \, 2 \zeta \zeta_{x_j} + (\partial_k^h a^{ij}) u_{x_i} \, \partial_k^h u_{x_j} \, \zeta^2$$

$$+ (\partial_k^h a^{ij}) \, u_{x_i} \, \partial_k^h u \; 2 \zeta \zeta_{x_j} \; dx$$

$$=: \alpha_1 + \alpha_2 .$$

Aufgrund der Elliptizitätsbed. (*) haben wir:

$$\alpha_1 \geq \gamma \int_\Omega \zeta^2 \, |\partial_k^h \operatorname{grad} u|^2 \, dx$$

Weiter folgt aus unseren Vor. auf die a^{ij}, b^i, c daß f eine geeignete Konstante $c_1 > 0$ gilt:

$$|\alpha_2| \leq c_1 \int_\Omega \zeta |\partial_k^h \operatorname{grad} u| \, |\partial_k^h u| + \zeta |\partial_k^h \operatorname{grad} u| \, |\operatorname{grad} u|$$

oder Ω''

$$+ \zeta |\partial_k^h u| \, |\operatorname{grad} u| \; dx$$

Indem man die ε-Ungleichung:

$$ab \leq \varepsilon^2 a^2 + \varepsilon^{-2} b^{-2}$$

geeignet auf die Faktoren anwendet und addiert, folgt:

$$|\alpha_2| \leq 2\varepsilon^2 \int_\Omega \zeta^2 |\partial_k^h \operatorname{grad} u|^2 dx + 2\frac{c_1^2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega''} (|\partial_k^h u|^2 dx + |\operatorname{grad} u|^2) dx$$

Wähle $2\varepsilon^2 = \frac{\gamma}{2}$ und beachte, daß nach Satz (7.1) i) gilt:

$$\int_{\Omega''} |\partial_k^h u|^2 dx \leq c_2 \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx \quad \text{f eine Konst. } c_2 .$$

Dies gibt:

$$|\alpha_2| \leq \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \zeta^2 |\partial_k^h \operatorname{grad} u|^2 dx + c_3 \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx .$$

Damit erhalten wir

$$|\alpha| = |\alpha_1 + \alpha_2| \geq \alpha_1 - |\alpha_2|$$

$$\geq \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \zeta^2 |\partial_k^h \operatorname{grad} u|^2 dx - c_3 \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx .$$

Als nächstes schätzen wir $|\beta|$ ab:

Mit $\tilde{f} = f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - cu$

$$\varphi = -\partial_k^{-h}(\zeta^2 \partial_k^h u)$$

sowie $\beta = \int_\Omega \tilde{f} \varphi \, dx$

erhalten wir:

$$|\beta| \leq c_4 \int_\Omega \big(|f| + |\operatorname{grad} u| + |u|\big)|\varphi| \, dx .$$

Aus Satz (7.1) ii) folgt

$$\int_\Omega |\varphi|^2 dx \leq c_5 \int_\Omega |\operatorname{grad}(\zeta^2 \partial_k^h u)|^2 dx$$

oder Ω''

$$\leq c_6 \int_{\Omega''} |\partial_k^h u|^2 + \zeta^2 |\partial_k^h \operatorname{grad} u|^2 \, dx$$

$$\leq c_7 \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 + \zeta^2 |\partial_k^h \operatorname{grad} u|^2 \, dx$$