Es gilt: $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = -\partial_\varepsilon \Phi = \frac{1}{vol(\partial U_\varepsilon(0))}$ für $x \in \partial U_\varepsilon(0)$.

Also ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial U_\varepsilon(0)} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{vol(\partial U_\varepsilon(0))} \int_{\partial U_\varepsilon(0)} \varphi \, dS = \varphi(0).$$

Es gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial U_\varepsilon(0)} \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = 0$$

da $\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \underset{d\geq 3}{=} c_d \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} \sum_{i=1}^{d} \frac{x_i}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$

und daher

$$\Big| \int_{\partial U_\varepsilon(0)} \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS \Big| \leq C_1 \cdot vol(\partial U_\varepsilon(0)) \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} = C_2 \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} \varepsilon^{d-1} = C_2 \cdot \varepsilon$$

Für $d = 2$ analog $\leq C_3 \, \varepsilon \log \varepsilon$.

Damit ist Satz 5.1 gezeigt.

<u>(5.2) Korollar</u> Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dann erfüllt die Funktion

$$u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \Phi(x-y) \, dy \in C^\infty(\mathbb{R}^d),$$

die Gleichung

$$-\Delta u = f.$$

<u>Bew.:</u> Wir wissen daß $u = \langle \Phi \rangle * f \overset{\Phi \in L^1_{loc}}{=} \langle \Phi * f \rangle$ die Gleichung $-\Delta u = f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ löst. Da $u \in C^\infty$ ist, löst u diese Gleichung auch im klassischen Sinne.

<u>Bem.:</u> Es gilt $u \in H^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ und $\| \operatorname{grad} u \|_{L^\infty} \leq C$ mit einer Konstanten C, die nur von supp f und $\|f\|_{L^\infty}$ abhängt.

Durch geeignete Grenzübergänge können wir allgemeinere Funktionen f zulassen, z. B. gilt

<u>(5.3) Satz</u> Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit kp. Träger. Dann gilt für

$$u(x) := (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\Phi(x-y)\,dy$$

daß $u \in H^{1,\infty}_{loc}$ ist und $-\Delta u = f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

<u>Bew.</u> in einer Übgsaufgabe.

Diese Lösungsformeln f. die Poisson-Gleichung liefern f. $f|_\Omega$ auch Lösungen der Poisson-Gleichung in beschränkten Gebieten. Allerdings kann man die Randwerte von u auf $\partial\Omega$ nicht vorschreiben. Durch Modifikation der Fundamental-Lösung durch eine geeignete harmonische Funktion läßt sich dies erreichen:

<u>Greensche Funktionen</u>

Sei $G(x,y) = \Phi(x-y)$. Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Es gilt $-\Delta\Phi = \delta_0$ also $-\Delta_y G(x,\cdot) = \delta_x$. Wir erhalten daher

$$(*) \qquad u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} G(x,y)\,\Delta u(y)\,dy. \quad \left(= (-\Delta_y G(x,\cdot))(u)\right)$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand. Für $x \in \Omega$ kann man die rechte Seite durch Integrale über Ω und $\partial\Omega$ ersetzen: Wähle hierzu ein $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\eta \equiv 1$ in $\overline{U_\varepsilon(x)} \subset \Omega$ f. ein $\varepsilon > 0$. Setze $u = u_1 + u_2$ mit $u_1 = \eta u$ und $u_2 = (1-\eta)u$. Formel $(*)$ f. u_1 liefert wegen $\operatorname{supp} u_1 \subset \Omega$:

$$(**) \qquad u_1(x) = -\int_\Omega G(x,y)\,\Delta u_1(y)\,dy.$$

Da $G(x,y)$ f. $y \neq x$ harmonisch ist, gilt:

$$u_2(x) = 0 \overset{!\,!!}{=} - \int_{\Omega \setminus \overline{U}_\varepsilon(x)} \Delta_y G(x,-)\, u_2(y)\, dy$$

Greensche Formel (4.28)(3)

$$= - \int_{\Omega \setminus \overline{U}_\varepsilon(x)} G(x,y) \Delta u_2(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} G(x,y) \frac{\partial u_2}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} u_2(y) \frac{\partial G(x,-)}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y)$$

oder Ω da $u_2 = 0$ in $\overline{U}_\varepsilon(x)$

Man beachte, daß die Randintegrale über $\partial U_\varepsilon(x)$ verschwinden, da $u_2 \equiv 0$ auf $\overline{U_\varepsilon(x)}$.

Addition dieser Gleichung zu (**) liefert f. $x \in \Omega$ wegen $u_2 = u$ auf $\partial\Omega$:

$$(5.4)' \quad u(x) = - \int_\Omega G(x,y) \Delta u(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} G(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G(x,-)}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y).$$

Bei dieser Rechnung haben wir von $G(x,y)$ nur benutzt, daß $-\Delta_y G(x,y) = \delta_x$ (dies impliziert insbes., daß $G(x,y)$ f. $y \neq x$ harmonisch ist!). Die gleiche Formel gilt also f. jedes G der allgemeinen Gestalt

$$G(x,y) = \Phi(x-y) + H(x,y)$$

wobei $H : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist mit $H(x,-) \in H^{2,2}(\Omega)$ (damit die Greensche Formel anwendbar ist) und $\Delta_y H(x,-) = 0$.

Wenn es gelingt, H so zu wählen, daß $G(x,y) = 0$ f. alle $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$, so erhalten wir:

$$u(x) = - \int_\Omega G(x,y) \Delta u(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G(x,-)}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y).$$

Wenn wir nun die PDGL

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

lösen wollen, so legt unsere Rechnung folgenden Ansatz nahe:

$$(5.5) \qquad u(x) = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} g(y)\, \frac{\partial G(x,-)}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y).$$

Man definiert nun:

<u>Def.</u>: (Greensche Funktion zum Dirichletproblem in Ω). Zu jedem $x \in \Omega$ sei die Funktion $H(x,-) \in H^{1,2}(\Omega)$ eine Lösung der Gleichungen:

$$\Delta_y H(x,-) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Spuroperator

$$H(x,-) = -\Phi(x - -) \quad \text{in } L^2(\partial\Omega). \quad \Big(\text{genauer } SH(x,-)\Big)$$

Dann heißt die Funktion $G(x,y) = \Phi(x-y) + H(x,y)$ die Greensche Funktion zum Dirichletproblem auf Ω.

Hier gilt nun der folgende Satz, den wir später beweisen werden:

<u>(5.6) Satz</u> Sei Ω beschränktes Lipschitz Gebiet im $\mathbb{R}^d$. Dann existiert eine Greensche Funktion zu Ω. Falls Ω sogar einen C^2-Rand hat, so gilt $H(x,-) \in H^{2,2}(\Omega)$. Ist dies der Fall und $u \in H^{2,2}(\Omega)$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f \in L^p(\Omega) \quad \text{mit } p > \frac{d}{2}$$

$$u = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt in jedem $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} u(y)\, \frac{\partial G(x,-)}{\partial \nu}\, d\sigma(y).$$

<u>Bem.</u>: Wegen $f \in L^p(\Omega)$ mit $p > \frac{d}{2}$ existiert das erste Integral f. alle x!

Bemerkung zu Neumann-Randbedingungen:

Formel (5.4) legt eine andere Art Randbedingungen nahe unter der man die Poisson Gleichung $-\Delta u = f$ lösen soll und die physikalische Bedeutung hat, nämlich

$$-\Delta u = f$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega .$$

Um das Neumann Problem zu lösen sucht man eine Funktion $H : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Delta_y H(x,-) = 0$ die der Bedingung

$$\frac{\partial H(x,-)}{\partial \nu}(y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x-y)$$

genügt. Dann ist $\frac{\partial G(x,-)}{\partial \nu} = 0$ so daß Formel (5.4) mit einem solchen G den Ansatz:

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} G(x,y)\varphi(y)\, d\sigma(y)$$

nahelegt. So ein G heißt Greensche Funktion zum Neumann Problem in Ω.

Beispiele für Greensche Funktionen

Sei $\Omega = U_R(0)$ die offene Kugel um $x=0$ mit Radius R im $\mathbb{R}^d$.

Satz 5.7 Die Greensche Funktion für das Dirichlet Problem in $\Omega = U_R(0)$ ist gegeben durch

$$G(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\left[\log\|x-y\| - \frac{1}{2}\log\left(R^2 - 2xy + \frac{\|x\|^2\|y\|^2}{R^2}\right)\right] & \text{für } d=2 \\ \frac{1}{d(d-2)\omega_d}\left[\frac{1}{\|x-y\|^{d-2}} - \left(R^2 - 2\langle x,y\rangle + \frac{\|x\|^2\|y\|^2}{R^2}\right)^{-\frac{d-2}{2}}\right] & \text{für } d \geq 3 \end{cases}$$

<u>Beweis</u> Man muß nachrechnen, daß der 2. Summand harmonisch ist. Für $x \in U_R(0)$, $\|y\| = R$ gilt offenbar $G(x,y) = 0$, denn dann ist

$$R^2 - 2\langle x, y\rangle + \frac{\|x\|^2\|y\|^2}{R^2} = R^2 - 2\langle x,y\rangle + \|x\|^2$$
$$= \|y - x\|^2 .$$

Für die "Neumann Ableitung" von G gilt für $d \geq 2$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,-) = -\frac{R^2 - \|x\|^2}{d\omega_d \cdot R}\|x-y\|^{-d} \quad \text{für } y \in \partial U_R(0).$$

Man erhält z.B. folgendes Resultat, daß durch die Formel in Satz (5.6) nahegelegt wird:

<u>(5.8) Satz</u> Zu $g \in C^0(\partial U_R(0))$ definiere für $x \in U_R(0)$

$$u(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{d\,\omega_d\, R} \int_{\partial U_R(0)} \frac{g(y)}{\|x-y\|^d}\, d\sigma(y) \qquad \text{(Poisson-Formel)}$$

und setze $u := g$ auf $\partial U_R(0)$. Dann gilt

$$u \in C^\infty(U_R(0)) \cap L^\infty \quad \text{und} \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } U_R(0)$$

sowie $u \in C^0(\overline{U_R(0)})$ und $u = g$ auf $\partial\Omega$.

<u>Bew.</u>: Da $(x,y) \longmapsto \dfrac{g(y)}{\|x-y\|^d}$ auf $U_R(0) \times \partial U_R(0)$ stetig und bei festem y eine C^∞-Fkt. von x ist, gilt $u \in C^\infty(U_R(0))$ und

$$\Delta u = \frac{1}{d\omega_d R}\int_{\partial U_R(0)} g(y)\, \Delta_x\left(\frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x-y\|^d}\right) d\sigma(y)$$

in $U_R(0)$. Nun gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \neq y$, daß:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|x-y\|^{\alpha} = \alpha \|x-y\|^{\alpha-2}(x_i - y_i).$$

Damit rechnet man nach, daß

$$\Delta_x \left(\frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|y-x\|^d} \right) = 0 \quad \text{für } x \neq y.$$

Insbesondere für $x \in U_R(0)$ und $y \in \partial U_R(0)$ folgt:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } U_R(0).$$

Weiter gilt:

$$\frac{R^2 - \|x\|^2}{d\omega_R R} \int_{\partial U_R(0)} \frac{d\sigma(y)}{\|x-y\|^d} = -\int_{\partial U_R(0)} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\cdot)\, d\sigma$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{U_R(0)} \Delta_y G(x,\cdot)\, d\lambda = \int_{U_R(0)} \delta_x \, d\lambda = 1$$

Diese formale Rechnung läßt sich durch Anwenden des Satzes von Gauß auf das Integral

$$0 = -\int_{U_R(0)\setminus U_\varepsilon(0)} \Delta_y G(x,\cdot)\, d\lambda$$

nach $\varepsilon \to 0$ rechtfertigen. Es folgt jedenfalls:

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty}.$$

Insbesondere ist $u \in L^\infty(B_R(0))$.

Es bleibt zu zeigen, daß für jede Folge $x_n \to z$ mit $x_n \in B_R(0)$ und $z \in \partial B_R(0)$ gilt $\lim_{n\to\infty} u(x_n) = g(z)$. Hierzu setzen wir

$$K(x,y) = -\frac{\partial G(x,\cdot)}{\partial \nu}(y) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{d\omega_R R} \|x-y\|^{-d}.$$

Für $x \in U_R(0)$ gilt wie oben gesehen $\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\, d\sigma(y) = 1$.

Für $K_n(y) := K(x_n, y)$ ist also ebenfalls

$$\int_{\partial B_R(0)} K_n(y)\, d\sigma(y) = 1 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Weiterhin gilt für jedes $\delta > 0$ mit $V_\delta = U_\delta(z) \cap \partial B_R(0)$ das

$$(\ast) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{\partial B_R(0) \setminus V_\delta} K_n(y)\, d\sigma(y) = 0$$

denn

$$\left| \int_{\partial B_R(0) \setminus V_\delta} K_n(y)\, d\sigma(y) \right| \leq \mathrm{vol}(\partial B_R(0))\, \frac{R^2 - \|x_n\|^2}{d\omega_R R} (\delta/2)^{-d}$$

falls n so groß ist, daß $\|x_n - z\| < \delta/2$ ist. Dann ist nämlich

$$\|x_n - y\| \geq \|z - y\| - \|x_n - z\| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } y \in \partial U_R(0) \setminus V_\delta$$

also

$$\|x_n - y\|^{-d} \leq (\delta/2)^{-d}.$$

Wegen $x_n \to z$ gilt $\|x_n\| \to \|z\| = R$. Damit folgt $(\ast)$.

Es gilt nun:

$$|u(x_n) - g(z)| = \left| \int_{\partial U_R(0)} (g(y) - g(z)) K_n(y)\, d\sigma(y) \right|$$

$$\leq \int_{\partial U_R(0) \setminus V_\delta} |g(y) - g(z)|\, K_n(y)\, d\sigma(y) + \int_{V_\delta} |g(y) - g(z)| K_n(y)\, d\sigma(y)$$

Mit $M = \max_{y \in \partial U_R(0)} |g(y) - g(z)| < \infty$ (da g stetig) folgt also:

$$|u(x_n) - g(z)| \le M \int_{\partial U_R(0) \setminus V_\delta} K_n(y)\, d\sigma(y) + \max_{y \in V_\delta} |g(y) - g(z)|$$

da $\int_{V_\delta} K_n(y)\, d\sigma(y) \le \int_{\partial U_R(0)} K_n(y)\, d\sigma(y) = 1$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$

wähle $\delta > 0$ so klein, daß $\max_{y \in V_\delta} |g(y) - g(z)| < \varepsilon/2$. Geht

da g stetig ist. Wähle anschließend n_0 so groß, daß für $n \ge n_0$

der erste Term $< \varepsilon/2$ ist. Für $n \ge n_0$ ist dann $|u(x_n) - g(z)| < \varepsilon$,

also gilt $\lim_{n \to \infty} u(x_n) = g(z)$.

Ein anderes Gebiet – diesmal unbeschränkt – in dem man die Greensche Funktion für das Dirichlet Problem explizit hinschreiben kann ist der sogenannte Halbraum $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}$.
Betrachte für $x \in \mathbb{R}^n_+$ den gespiegelten Punkt $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d)$.
Wir suchen eine Funktion $H: \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, die für jedes $x \in \mathbb{R}^n_+$ die Gleichung $\Delta_y H(x, -) = 0$ löst und welche dieselben Randwerte wie $-\Phi(x-y)$ hat. Man nehme einfach

$$H(x,y) = -\Phi(\tilde{x} - y)$$

So daß wir für die Greensche Funktion erhalten

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi(\tilde{x} - y).$$

Die Neumann-Ableitung ist gegeben durch

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, -) = \langle e_d, \operatorname{grad}_y G(x,-) \rangle = \frac{2 x_d}{d\,\omega_d} \frac{1}{\|x - y\|^d} =: K(x,y).$$

$$e_d = (0, \dots, 0, 1)$$

Die Formel in Satz (5.6) legt also folgenden Satz nahe, der genauso wie Satz (5.8) bewiesen wird: $(\partial \mathbb{R}^d_+ = \mathbb{R}^{d-1})$

<u>Satz 5.9</u> Sei $g \in C^0(\mathbb{R}^{d-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$. Setze:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(x,y) g(y)\, dy = \frac{2 x_d}{d \omega_d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{g(y)}{\| x - y \|^d}\, dy ,$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d_+) \cap L^\infty$, $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^d_+$ und

$$\lim_{n \to \infty} u(x_n) = g(z)$$

für jedes $z \in \partial \mathbb{R}^d_+ = \mathbb{R}^{d-1}$ und jede Folge x_n in $\mathbb{R}^d_+$ mit $x_n \to z$.