Distributionen

Wir haben mit der schwachen Ableitung bereits einen verallgemeinerten Ableitungsbegriff für gewisse L^1_{loc}-Funktionen eingeführt. Wenn man darauf verzichtet, daß die Ableitung eine Funktion ist, so läßt sich in einem allgemeineren Sinne jede L^1_{loc}-Funktion differenzieren. Eine solche Verallgemeinerung von Funktionen erhält man in den von Laurent Schwartz und unabhängig von Sobolev eingeführten Distributionen. Wir beginnen mit der Definition und geben dann Beispiele. 4.18

__Bez.__ Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Der Raum $\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$ wird auch als Raum der Testfunktionen bezeichnet.

__(4.18) Def.:__ Eine Distribution auf Ω ist eine lineare Abbildung

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

die folgender Bedingung genügt:
Für jedes kompakte $K \subset \Omega$ ex. $c = c_K \geq 0$ sowie $m = m_K \geq 0$, so daß gilt:

$$(*) \quad |T(\varphi)| \leq c \, \|\varphi\|_{C^m} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ mit } \operatorname{supp}\varphi \subset K$$

__Bem.:__ a) $\|\varphi\|_{C^m} := \max\limits_{|\alpha| \leq m} \sup\limits_{x \in \Omega} |(D^\alpha \varphi)(x)|$.

b) Es gibt eine geeignete Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$, so daß $(*)$ gerade die Stetigkeit von T bedeutet. (Freiwillige Übg.)

c) Die Distributionen auf Ω bilden einen Vektorraum, der mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet wird.

__Beispiele__ 1) Man hat eine injektive lineare Abbildung

$$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad f \mapsto T_f$$

wobei $T_f(\varphi) = \int_\Omega f \varphi \, d\lambda$.

Man schreibt auch $\langle f \rangle$ oder nur f für die Distribution T_f

[z.B.: falls $f \in L^2(\Omega)$ ist, so wähle $\varphi_n \to f$ in L^2 (ex.!). Dann gilt $0 = T_f(\varphi_n) = (f, \varphi_n)_{L^2} \to (f,f)_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Also $0 = \|f\|_{L^2}$ also $f = 0$ in L^2. Im dem allg. Fall muß man etwas mehr arbeiten]

beachte: Für $\operatorname{supp} \varphi \subset K \subset \Omega$ ist $|T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_{C^0}$ also ist T_f wirklich eine Distribution.

2) Einschränkung von Distributionen. Seien $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ offen. Fortsetzen durch 0 liefert eine Inklusion $\mathcal{D}(\tilde{\Omega}) \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Man definiert $T|_{\tilde{\Omega}} \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ durch

$$(T|_{\tilde{\Omega}})(\varphi) = T(\varphi) \quad \text{f. } \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega}).$$

Dann gilt (*) mit denselben c, m.

3) Dirac distribution Für $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ setze $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Wegen $|\delta_a(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{C^0}$ ist δ_a eine Distribution. δ_a ist keine Funktion d.h. nicht von der Form T_f f. ein $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Sonst wäre $0 = T_f|_{\Omega \setminus a} = T_{f|_{\Omega \setminus a}}$ also $f|_{\Omega \setminus a} = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega \setminus a)$ also auch $f = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ (kommt auf Werte in Nullmengen nicht an)

4) Allg. def. $\delta_a^{(\alpha)}(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \varphi)(a)$ eine Distribution.

Distributionen kann man immer bel. oft partiell diff.:

(4.19) Def.: Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ def. $\partial_i T$ durch

$$(\partial_i T)(\varphi) = -T(\partial_i \varphi) \quad \text{f. } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \text{ Damit wird}$$

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \text{ falls } D^\alpha T := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} T \text{ gesetzt wird.}$$

Beisp.: 1) $\delta_a^{(\alpha)} = D^\alpha \delta_a$ 2) $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ hat α-te schwache Abl. $g \in L^1_{loc}$ $\Leftrightarrow D^\alpha T_f = T_g$.

3) Sei $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{f. } x < 0 \\ 1 & \text{f. } x \geq 0 \end{cases}$. Dann ist $H' = \delta_0$ denn $T_H'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi' = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$

4) Für $f \in C^m(\bar{\Omega})$ gilt $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$ f. alle $|\alpha| \leq m$.

(4.20) Def.: Seien $T_n, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Wir sagen T_n konv. gegen T i.e. $T_n \to T$ für $n \to \infty$ falls für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi).$$

Bem.: Es gibt eine Topologie auf $\mathcal{D}'(\Omega)$, die zu diesem Konvergenz-begriff führt.

Beispiel: 1) Sei $a_n \to a$ dann gilt $\delta_{a_n} \to \delta_a$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

2) $\sin nx \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d.h. $T_{\sin nx} \to 0$, denn

$$T_{\sin nx}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin nt \, dt \underset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t) \cos nt \, dt \to 0$$

da $$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t) \cos nt \, dt \right| \le \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t)\, dt = \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi'(t)| \underset{\text{da } \varphi \text{ kp. Träger}}{<} \infty$$

Beachte: Punktweise Konv. $\sin nx$ nicht.

Fakt $T_n \to T \Rightarrow D^\alpha T_n \to D^\alpha T$ (klar nach Def.)

(4.21) Lemma: Sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\int \psi = 1$ und $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \psi(\frac{x}{\varepsilon})$

Dann gilt $\psi_\varepsilon \to \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Bew.: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$T_{\psi_\varepsilon}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(x) \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) \frac{dx}{\varepsilon^n}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \varphi(\varepsilon y)\, dy.$$

Mit dem Satz von Lebesgue folgt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_{\psi_\varepsilon}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \varphi(0)\, dy = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Man kann nicht nur L^1-Funktionen falten und damit regularisieren, sondern auch Distributionen:

<u>Def.</u>: Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Man setzt:

$$(T * \psi)(x) := T(y \mapsto \psi(x-y))$$

Für $f \in L^1_{loc}$ ist also

$$(T_f * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\psi(x-y)\,dy = (f * \psi)(x).$$

<u>(4.22) Satz</u> Sei ψ_ε Dirac-Folge zu $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\int \psi = 1$, sowie $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $T * \psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$T * \psi_\varepsilon \to T \text{ für } \varepsilon \to 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

<u>Bew.</u>: o.E. $d=1$, $d>1$ analog. Es gilt für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$:

$$\left| \frac{(T*\psi)(x+h) - (T*\psi)(x)}{h} - (T * \psi')(x) \right|$$

$$= \left| T\left(y \mapsto \left(\frac{\psi(x+h-y) - \psi(x-y)}{h} - \psi'(x-y)\right)\right)\right|$$

$$\leq C_K \underbrace{\| y \mapsto (\ldots) \|_{C^k}}$$ für geeignetes Kp. K, $k \geq 1$

$\to 0$ für $h \to 0$ da alle Abl. von ψ auf K gleichmäßig stetig sind.

Also ist $T * \psi$ diffb. und es gilt induktiv $D^k(T*\psi) = T * D^k\psi$. Es folgt $T * \psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$(T * \psi_\varepsilon)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} (T * \psi_\varepsilon)(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} T(y \mapsto \psi_\varepsilon(x-y)\varphi(x))\,dx$$

$$\overset{!}{=} T\left(y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(x-y)\varphi(x)\,dx\right) = T\left(y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(x)\varphi(x+y)\,dx\right)$$

Integral durch Σ approx., Stetigkeit von T ausnutzen

$$\overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(x) \underbrace{T(y \mapsto \varphi(x+y))}_{=: f(x)} \, dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \underset{\underset{f(0)}{\shortparallel}}{T(\varphi)} .$$

[denn $\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(x) f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) f(\varepsilon x)\, dx = \int_{\operatorname{supp}\psi} \psi(x) f(\varepsilon x)\, dx$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ stet.}}}{\longrightarrow} \int \psi(x) f(0)\, dx = f(0) \text{ für } \varepsilon \to 0]$$

<u>Beispiel</u> Sei $T = \delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$(\delta_0 * \psi)(x) = \delta_0(y \mapsto \psi(x-y)) = \psi(x), \text{ also } \delta_0 * \psi = \psi .$$

Aus Satz (4.22) folgt also

$$\delta_0 * \psi_\varepsilon \to \delta_0 \quad \text{d.h. } \psi_\varepsilon \to \delta_0 \text{ i.e. Lemma (4.21).}$$

<u>Bem.</u>: Für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt $D^\alpha(T * \psi) = (D^\alpha T) * \psi$ (Def. einsetzen!).
Sei $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$, $P = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$
Setze $P(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$. Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ heißt Fundamentallösung zum Diff. Op. $P(D)$, falls gilt

$$P(D)(T) = \delta_0 .$$

Für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ und die Funktion $u = T * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt dann:

$$P(D)(u) = P(D)(T * \psi) = P(D)(T) * \psi = \delta_0 * \psi = \psi$$

d.h. $P(D)(u) = \psi$. Wenn man eine Fundamentallösung kennt, kann man also alle inhomog. PDGL $P(D)(u) = \psi$ lösen.

Der Spuroperator auf Sobolev Räumen

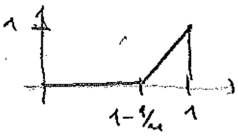
Im folgenden skizzieren wir die Theorie der Randwerte von Sobolev Fkt. Vollst. Beweise finden sich in den Büchern von Alt: Lineare Funktionalanalysis, Evans: PDE oder Adams: Sobolev spaces.

Sei Ω beschränktes Gebiet. Sei f Fkt. auf $\overline{\Omega}$, dann ist $f|_{\partial\Omega}$ definiert. Solche Randwerte braucht man auch in der Sobolev Theorie! Problem: Dort sind Funktionen nur modulo den Werten auf Nullmengen definiert und $\partial\Omega$ ist eine Nullmenge in $\overline{\Omega}$. Ohne Kontrolle über die Ableitung hat man keine Chance:

<u>Bem.</u>: Es gibt keine lineare stetige Abb.

$$S : L^2[0,1] \to \mathbb{R}$$

mit $S(f) = f(1)$ f. alle $f \in C^0[0,1]$.

<u>Bew.</u>: Betrachte die Folge $f_n(x) =$ 

Es gilt $f_n \to 0$ in $L^2[0,1]$, denn

$$\int_0^1 |f_n|^2 dx \le \int_{1-1/n}^1 1 \, dx = 1/n$$

Also wäre $S(f_n) \to S(0) = 0$. Aber $S(f_n) = f_n(1) = 1$ ↯.

In diesem Beispiel wird f_n' sehr groß. Tatsächlich existiert ein Spuroperator S, wenn man f_n' kontrollieren kann:

<u>Satz (4.23)</u> (Spursatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz Rand $\partial\Omega$ sowie $1 \le p < \infty$. Dann ex. ein eind. best. stetiger linearer Operator

$$S : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

so daß f. Funktionen $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H^{1,p}(\Omega)$ gilt:

$$S(f) = f|_{\partial\Omega}.$$

Zum Beweis benötigen wir zunächst eine Dichtheitsaussage, die Satz 4.12 bei Gebieten mit Lipschitz-Rand verschärft:

<u>Satz (4.24)</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$. Dann ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^{p,m}(\Omega)$ dicht in $H^{p,m}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$ und $m \ge 0$.

<u>Bew.:</u> Vergl. z.B. Alt A.5.7.

Das folgende Lemma ist einfach und grundlegend

<u>Lemma (4.25)</u> Sei D eine dichte Teilmenge im Banachraum B. Sei $S : D \to B'$ eine Abb. in einen weiteren Banachraum B', die

(*) $$\| S(d_1) - S(d_2) \| \le c \, \| d_1 - d_2 \|$$

für alle $d_1, d_2 \in D$ genügt. Dann ex. genau eine stetige Fortsetzung von S zu einer Abbildung $\tilde{S} : B \to B'$.

<u>Bew.:</u> <u>Eind.:</u> Sei $b \in B$. Ex. Folge $d_n \in D$ mit $d_n \to b$ da D dicht. Da $\tilde{S}$ stetig, folgt $\tilde{S}(b) = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}(d_n) = \lim_{n\to\infty} S(d_n)$. Also ist $\tilde{S}$ eind. durch S bestimmt.

<u>Ex.:</u> Zu $b \in B$ wähle $d_n \to b$. Wegen (*) ist mit (d_n) auch $S(d_n)$ eine Cauchy-Folge, also konv. Setze $\tilde{S}(b) = \lim_{n\to\infty} S(d_n)$. Das ist wohldef.: Sei $d_n' \to b$ weitere solche Folge. Wegen (*) ist:

$$\| S(d_n) - S(d_n') \| \le c \, \| d_n - d_n' \| \to 0$$

also haben $S(d_n)$ und $S(d_n')$ denselben Grenzwert.

Aus (*) folgt durch geeignete Limiten:

$$\| \tilde{S}(b_1) - \tilde{S}(b_2) \| \le c \, \| b_1 - b_2 \| .$$

Insbes. ist $\tilde{S}$ stetig.

Aufgrund des Lemmas und von Satz 4.24 genügt es, folg. Beh. zu zeigen:

Beh.: Es ex. ein $c \geq 0$, so dß für die Abb.:

$$S : C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

gilt

$$\| S(f_1) - S(f_2) \|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \, \| f_1 - f_2 \|_{H^{1,p}(\Omega)}$$

für alle $f_1, f_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Bew.: Sei $\sum_{j=0}^{m} \varphi_j = 1$ Partition der Eins zu einer off. Überdeckg U_j von $\partial\Omega$ für die gilt:

$$\Omega \cap U_j = \{ (x,y) \mid x \in V_j \text{ und } y < g_j(x) \}.$$

Hierbei ist $V_j \subset \mathbb{R}^{d-1}$ offen und $g_j : V_j \to (a_j, b_j)$ Lipschitz Funktion.

Es genügt für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, ein $c_j \geq 0$ zu finden mit

$$(*) \qquad \| S(\varphi_j f) \|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c_j \, \| \varphi_j f \|_{H^{1,p}(\Omega)} ,$$

denn dann folgt:

$$\| S(f_1) - S(f_2) \|_{L^p(\partial\Omega)} = \Big\| \sum_{j=0}^{m} S(\varphi_j (f_1 - f_2)) \Big\|_{L^p(\partial\Omega)}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m} c_j \, \| \varphi_j (f_1 - f_2) \|_{H^{1,p}(\Omega)}$$

$$\leq c \, \| f_1 - f_2 \|_{H^{1,p}(\Omega)}$$

(4.17) oder Bew. von Satz (4.18)

Bemerke: früher gezeigt: $\partial_i(\varphi_j (f_1 - f_2)) = (\partial_i \varphi_j)(f_1 - f_2) + \varphi_j \, \partial_i (f_1 - f_2)$

damit $\| \varphi_j (f_1 - f_2) \|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq \text{const} \, \| f_1 - f_2 \|_{H^{1,p}(\Omega)}$.

Um Gleichung (*) zu zeigen setze $u = \psi_j f \in C_0^\infty(U_j)$; $V = V_j$; $g = g_j$; $a = a_j$.
Es gilt $\partial\Omega \cap U_j = \{(x, g(x)) \mid x \in V\}$, also

$$(u|_{\partial\Omega})(x, g(x)) = \int_a^{g(x)} (\partial_y u)(x,y)\, dy$$

da $u(x,a) = 0$ wegen $u \in C_0^\infty(U_j)$. $\quad (U_j = V \times (a,b))$

Es folgt:

$$\|S(u)\|^p_{L^p(\partial\Omega)} = \int_V |u(x, g(x))|^p \, d\sigma(x) \quad \text{mit } d\sigma(x) = \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}\, dx$$

$$= \int_V \left| \int_a^{g(x)} (\partial_y u)(x,y)\, dy \right|^p d\sigma(x)$$

$$\leq C \int_V \int_a^{g(y)} |\partial_y u\,(x,y)|^p \, dy \, d\sigma(x) \leq D \, \|u\|^p_{H^{1,p}(\Omega)}$$

Hölder $\quad \|f\|^p_{L^1} \leq \|f\|^p_{L^p} \underbrace{\|1\|^p_{L^q}}_{=:C} \quad ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Damit ist (*) gezeigt. Die Beschreibung $S(f) = f|_{\partial\Omega}$ für $f \in C^0(\bar\Omega) \cap H^{1,p}(\Omega)$ statt $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ erfordert <u>zusätzliche</u> Überlegungen! vergl. Alt loc. cit.

<u>Def.</u>: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Für $1 \leq p < \infty$ und $m \geq 0$ setzt man

$$H_0^{m,p}(\Omega) := \text{Abschluß von } C_0^\infty(\Omega) \cap H^{m,p}(\Omega) \text{ in } H^{m,p}(\Omega).$$

Dies ist ein abgeschlossener Untervektorraum im Banachraum $H^{m,p}(\Omega)$, also wieder ein Banachraum.

Satz 4.26 Für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit Lipschitz Rand gilt:

$$H_0^{1,p}(\Omega) = \mathrm{Ker}(S : H^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega))$$

Bew.: Fkt. in $C_0^\infty(\Omega)$ haben Randwerte $= 0$. Wegen der Stetigkeit von S gilt also $S(f) = 0$ f. alle $f \in H_0^{1,p}(\Omega)$, also "$\subset$". Für die Umkehrung vergl. Alt A5.11.

Wir beenden diesen Abschnitt mit Versionen der Sätze von Gauß und Green f. Sobolev Funktionen:

Satz 4.27 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschr. Lipschitz-Gebiet, $u \in H^{1,1}(\Omega)$ und $\alpha, \beta \in H^{1,2}(\Omega)$. Dann gilt f. $1 \leq i \leq n$ und die äußere Normale ν an $\partial\Omega$

(1) $$\int_\Omega \partial_i u \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} u \nu_i \, d\sigma$$ ($d\sigma$ andere Bez. f. Oberflächenintegral dS)

(2) $$\int_\Omega (\partial_i \alpha)\beta + \alpha(\partial_i \beta) \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} \alpha\beta\nu_i \, d\sigma$$

Dabei wird auf der r.S. über die Spur $S(u)$ bzw. $S(\alpha\beta)$ integriert.

Bew. (1) Nach Satz (4.24) ex. eine Folge $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^{1,1}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $H^{1,1}(\Omega)$. Dann gilt $\partial_i u_n \to \partial_i u$ in $L^1(\Omega)$ also

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \partial_i u_n \, d\lambda = \int_\Omega \partial_i u \, d\lambda .$$

Da die Spurabb. $S : H^{1,1}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ stetig ist konv. $S(u_n) \to S(u)$ in $L^1(\partial\Omega)$, also auch $S(u_n)\nu_i \to S(u)\nu_i$ da $\nu_i \in L^\infty(\partial\Omega)$. Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} u_n \nu_i \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} u \nu_i \, d\sigma .$$

Also folgt (1) aus dem Satz von Gauß für u_n.

(2) Seien $\alpha_n, \beta_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^{1,2}(\Omega)$ mit $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ in $H^{1,2}(\Omega)$. Nach Satz 4.17 ist $\alpha\beta \in H^{1,1}(\Omega)$ und es gilt $\partial_i(\alpha\beta) = (\partial_i\alpha)\beta + \alpha\,\partial_i\beta$. Also gilt

$$\|\alpha\beta - \alpha_n\beta_n\|_1 \le \|\alpha\beta - \alpha_n\beta\|_1 + \|\alpha_n\beta - \alpha_n\beta_n\|_1$$

$$\le \underbrace{\|\alpha-\alpha_n\|_2}_{\to 0}\|\beta\|_2 + \underbrace{\|\alpha_n\|_2}_{\text{beschr.}}\underbrace{\|\beta-\beta_n\|_2}_{\to 0}$$

Also $\alpha_n\beta_n \to \alpha\beta$ in $L^1(\Omega)$. Weiter ist: wie eben

$$\|\partial_i(\alpha\beta) - \partial_i(\alpha_n\beta_n)\|_1 \le \|(\partial_i\alpha)\beta - (\partial_i\alpha_n)\beta_n\|_1 + \|\alpha(\partial_i\beta) - \alpha_n(\partial_i\beta_n)\|_1 \to 0$$

Also gilt $\alpha_n\beta_n \to \alpha\beta$ in $H^{1,1}(\Omega)$. Wegen der Stetigkeit der Spurabb. ist $S(\alpha\beta) = \lim_{n\to\infty} S(\alpha_n\beta_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n\beta_n)|_{\partial\Omega}$

$$= \lim_{n\to\infty} (\alpha_n|_{\partial\Omega})(\beta_n|_{\partial\Omega}) = S(\alpha)\,S(\beta).$$

Damit folgt (2) durch (1) angewandt auf $u = \alpha\beta$.

<u>Korollar 4.28</u> (Satz von Green) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschr. Lipschitz-Gebiet. Dann gelten folgende Formeln

(1) $$\int_\Omega \Delta u \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS \qquad \text{für } u \in H^{2,1}(\Omega)$$

(2) $$\int_\Omega \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle \, d\lambda = -\int_\Omega u \Delta v \, d\lambda + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial\nu} u \, dS \quad \text{für } u \in H^{1,2}(\Omega), v \in H^{2,2}(\Omega)$$

(3) $$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\, dS \quad \text{für } u, v \in H^{2,2}(\Omega)$$

<u>Bew.</u>: (1) folgt aus (4.27)(1) durch Ersetzen von u durch $\partial_i u$

(2) folgt aus (4.27)(2) mit $\alpha = u$ und $\beta = \partial_i v$

(3) folgt aus (2) durch Vertauschen von u und v und Subtraktion

5. Explizite Lösungsformeln für die Poisson Gleichung in speziellen Gebieten

Wir werden die Diffgl. $-\Delta u = f$ zum Anfangswert $u|_{\partial\Omega} = g$ in einfachen Gebieten durch Integralformeln lösen.

Zunächst bestimmen wir eine Fundamentallösung $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ zu $-\Delta = P(D)$ mit $P = -\sum_{i=1}^{d} x_i^2$, d.h. eine Distributionslösung der Gleichung

$$-\Delta(T) = \delta_0 .$$

Tatsächlich wird T sogar durch eine L^1_{loc}-Funktion Φ repräsentiert:

<u>Def.</u>: Für $d \geq 2$ definiere $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ durch die Formel:

$$\Phi(x) := \begin{cases} -c_2 \log \|x\| & \text{f. } d = 2 \\ c_d \dfrac{1}{\|x\|^{d-2}} & \text{f. } d \geq 3 \end{cases}$$

mit den Konstanten

$$c_2 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{und} \quad c_d = \frac{1}{d(d-2)\omega_d} \quad \text{f. } d \geq 3$$

wobei ω_d = Vol. der Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$.

<u>Bem.</u>: a) Es gilt $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ denn:

<u>$d=2$</u>
$$\int_{B_R(0)} |\Phi| \, d\lambda = -c_2 \, 2\pi \int_0^R (\log r)\, r \, dr < \infty \quad \text{f. alle } R \geq 0$$

<u>$d \geq 3$</u>
$$\int_{B_R(0)} |\Phi| \, d\lambda = c_d \int_0^R \int_{\partial U_r(0)} r^{2-d} \, dS(y) \, dr$$

Formel (*) nach Satz 3.3

$r^{(2-d)p+d-1}$

$(2-d)p+d-1 > -1$

$(2-d)p > -d$

$d > p(d-2)$

$$= c_d \operatorname{vol}(\partial U_1(0)) \int_0^R r^{2-d} \, r^{d-1} \, dr < \infty \quad \text{f. } R \geq 0 .$$

b) Es gilt sogar $\Phi \in H^{1,p}_{loc}$ für jedes $1 \leq p < \frac{d}{d-1}$ da

$\operatorname{grad} \Phi = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{x}{\|x\|} \frac{1}{\|x\|^{d-1}}$ für alle $d \geq 2$. Das folgt mit einer ähnlichen Rechnung wie eben da $\int_0^R r^\alpha \, dr < \infty$ für $\alpha > -1$.

c) Es gilt $\operatorname{Vol}(\partial U_r(0)) = d\omega_d r^{d-1}$ und daher wenn wir $\Phi(r) = \Phi(x)$ mit $\|x\| = r$ setzen (ist wohldef.)

$$\partial_r \Phi(r) = -\frac{1}{\operatorname{vol}(\partial U_r(0))},$$

$\operatorname{grad} \Phi = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{x}{\|x\|} \frac{1}{\|x\|^{d-1}}$

Wie angekündigt gilt nun:

<u>(5.1) Satz</u> $\quad -\Delta \Phi = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

<u>Bew.:</u> Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$-\Delta\langle\Phi\rangle(\varphi) = -\langle\Phi\rangle(\Delta\varphi) \quad \text{nach Def. der Abl. von Distrib.}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^d} \Phi \, \Delta\varphi \, d\lambda$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} -\int_{\mathbb{R}^d \setminus U_\varepsilon(0)} \Phi \, \Delta\varphi \, d\lambda$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_\varepsilon(0)} \varphi \, \Delta\Phi - \Phi \, \Delta\varphi \, d\lambda$$

$\longleftarrow$ oder $U_R(0) \setminus U_\varepsilon(0)$ für $R >> 0$!

da $\Delta\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus 0$ ist (leichte Rechnung!). Also folgt mit dem Satz von Green, Kor. (4.28)(3)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U_\varepsilon(0)} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dS$$

Es gilt: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = -\partial_\varepsilon \Phi = \dfrac{1}{\mathrm{vol}(\partial U_\varepsilon(0))}$ für $x \in \partial U_\varepsilon(0)$.

Also ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U_\varepsilon(0)} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \, dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}(\partial U_\varepsilon(0))} \int_{\partial U_\varepsilon(0)} \varphi \, dS = \varphi(0).$$

Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U_\varepsilon(0)} \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dS = 0$$

da

$$\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \underset{d \geq 3}{=} c_d \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} \sum_{i=1}^{d} \frac{x_i}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

und daher

$$\left| \int_{\partial U_\varepsilon(0)} \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dS \right| \leq C_1 \cdot \mathrm{vol}(\partial U_\varepsilon(0)) \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} = C_2 \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} \varepsilon^{d-1} = C_2 \cdot \varepsilon$$

Für $d = 2$ analog $\leq C_3 \, \varepsilon \log \varepsilon$.

Damit ist Satz 5.1 gezeigt.