Bew.: Wähle $w \in C_0^2(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$. Für $u_\varepsilon = u + \varepsilon w \in X$ gilt wegen der Minimalität von u:

$$0 \leq \frac{E(u_\varepsilon) - E(u)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \| \operatorname{grad} (u + \varepsilon w) \|^2 - \| \operatorname{grad} u \|^2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \langle \operatorname{grad} u + \varepsilon \operatorname{grad} w, \operatorname{grad} u + \varepsilon \operatorname{grad} w \rangle - \| \operatorname{grad} u \|^2$$

$$= 2 \int_\Omega \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w \rangle + \varepsilon \int_\Omega \| \operatorname{grad} w \|^2$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. war, folgt

$$0 \leq 2 \int_\Omega \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w \rangle = -2 \int_\Omega (\Delta u)\, w \;.$$

Fubini, part. Integration, kein Randterm da w kp. Träger in Ω hat

Da w bel. war, folgt $-\Delta u \geq 0$. Ein entsprechendes Argument f. $\varepsilon < 0$ zeigt $-\Delta u \leq 0$ also insgesamt $-\Delta u = 0$.

Wärmeleitungsgleichung

Wir zeigen ein Maximumprinzip f. die Wärmeleitungsgleichung und folgern Eindeutigkeit der Lösung.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen beschränkt mit Lipschitz Rand. Für $T > 0$ sei $\Omega_T = \Omega \times (0,T] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$\Gamma_T = \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T = \overline{\Omega} \times [0,T] \setminus \Omega \times (0,T]$$

$$= \overline{\Omega} \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0,T]$$

der "parabolische Rand".

Es gilt das folgende "parabolische Maximumprinzip":

Satz 3.8 Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ Lösung von

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in } \Omega_T .$$

Dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u .$$

Beweis Idee: Ist u in einem Punkt $(x_0,t_0)\in\Omega_T$ maximal

so ist $\quad 0 \le \partial_t u(x_0,t_0) = \Delta u(x_0,t_0) \le 0 \quad \leftarrow$ 1.te Ortsableitg. verschw. und 2.te Ableitg sind ≤ 0

$\uparrow$ Ableitg. ≥ 0 im lok. Max

(nicht nötig. $=0$ da $(0,T]$ nicht offen: falls $t_0=T$ so

ist $\quad \partial_t u(x_0,t_0) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{u(x_0,T+h)-u(x_0,T)}{h} = \dfrac{\le 0}{\le 0} \ge 0$).

Wäre $\Delta u(x_0,t_0)<0$, so hätte man einen $\cancel{\xi}$

Setzt man $v(x,t) = e^{\alpha t}u(x,t)$ f. geeignetes α, so kann man dieser Idee zum Erfolg verhelfen wie folgt:

Annahme u nimmt ihr Max in $\overline{\Omega}_T$ nicht auf Γ_T an.

Sei $(x_0,t_0)\in\Omega_T$ ein Punkt mit

$$u(x_0,t_0) = \operatorname{Max}_{\overline{\Omega}_T} u ,$$

o.E. sei $t_0 = T$ (sonst verkleinere T zu t_0).

o.E. sei $\max\limits_{\Gamma_T} u = 1$ (sonst Addition einer Konstante)

Dann ist also $u(x_0,T) = 1+\varepsilon$ f. ein $\varepsilon>0$ und ein $x_0\in\Omega$.

Setze:
$$v(x,t) = e^{\lambda(T-t)}u(x,t),$$

Für genügend kleines $\lambda>0$ gilt $v\le 1+\varepsilon/2$ auf Γ_T

und $\quad v(x_0,T) = 1+\varepsilon$. Fixiere so ein λ.

Wie u nimmt also v ihr Max auf $\overline{\Omega}_T$ nicht in Γ_T an.

Sei $(x_1,t_1)\in\Omega_T$ ein Punkt mit

$$v(x_1,t_1) = \max_{\overline{\Omega}_T} v \quad (\ge 1+\varepsilon)$$

Dann gilt $t_1 \leq T$ und wegen Maximalität:

$$(\partial_t v)(t_1, x_1) \geq 0 ,$$

Andererseits verschwinden 1. Ortsabl. in (t_1, x_1) und 2. Abl. sind ≤ 0. Also ist

$$\Delta v (t_1, x_1) \leq 0 ,$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \partial_t v &= -\lambda v + e^{\lambda(T-t)} \cdot \partial_t u \\ &= -\lambda v + e^{\lambda(T-t)} \Delta u \\ &= -\lambda v + \Delta v , \end{aligned}$$

Es folgt:

$$0 \leq (\partial_t v)(t_1, x_1) \leq -\lambda v(t_1, x_1) < 0 \quad ⚡ \quad \text{da } v(t_1, x_1) \geq 1+\varepsilon ,$$

Wie bei der Poisson Gleichung erhält man sofort die folgende Eindeutigkeitsaussage:

<u>Kor. 8.9</u> (Eindeutigkeit bei der Wärmeleitungsgleichung)

Zu $f \in C^0(\Omega_T)$ und $g \in C^0(\Gamma_T)$

gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega_T \\ u|_{\Gamma_T} &= g \quad \text{auf } \Gamma_T . \end{aligned}$$

Die Wellengleichung in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Sie beschreibt für $n=1$ eine vibrierende Saite, für $n=2$ eine vibrierende Membran, für $n=3$ einen vibrierenden elastischen Körper etc.

Sei $u = u(x,t)$ die vertikale Auslenkung von $\Omega \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ im Punkt x zur Zeit t.

Sei $V \subset \Omega$ kleines Vol.element. Die Gesamtbeschleunigung innerhalb V ist dann:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V u \, d\lambda = \int_V u_{tt} \, d\lambda .$$

Sei $\vec{F}$ die Kraft, die auf V durch ∂V wirkt, sei ν die äußere Normale zu V. Dann wirkt auf V die Gesamt-Kraft

$$- \int_{\partial V} \langle \vec{F}, \nu \rangle \, dS .$$

Die Massen-Dichte sei $\equiv 1$. Nach Newtons Gesetz (Kraft = Masse · Beschleunigung) ist also

$$\int_V u_{tt} \, d\lambda = - \int_{\partial V} \langle \vec{F}, \nu \rangle \, dS \underset{\text{Gauß}}{=} - \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, d\lambda .$$

Da V bel. war, folgt

$$u_{tt} = - \operatorname{div} \vec{F} .$$

Für elastische Körper ist $\vec{F}$ eine Funktion von $\operatorname{grad} u$:

$$\vec{F} = \vec{F}(\operatorname{grad} u) .$$

Nach dem Hookeschen Gesetz gilt in erster Näherung

$$\vec{F}(v) = -a v \quad \text{für eine Elastizitätskonstante } a > 0 .$$

Im Fall $a = 1$ erhalten wir also $u_{tt} = - \operatorname{div}(-\operatorname{grad} u)$ d.h.

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad , \text{die „Wellengleichung"} .$$

Die physikalische Anschauung legt andere Lösungen

$$u = u(x,t) \in C^0(\Omega \times [0,\infty)) \cap C^2(\Omega \times (0,\infty))$$

zu vorgegebenen Anfangswerten

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$(\partial_t u)(x,0) = u_1(x)$$

mit $u_0, u_1 \in C^2(\Omega)$ zu suchen. Man gibt also die Auslenkung u sowie die Geschwindigkeit $\partial_t u$ der Auslenkung zur Zeit $t=0$ vor.

Beispiel $n=1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$. Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

kann man leicht zeigen, daß jede Lösung von

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

die Form $f(x+t) + g(x-t)$ hat. Obiges Anfangswertproblem kann man explizit durch die Formel von d'Alembert lösen:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\,dy.$$

Das ist eine leichte Rechnung.
Man sieht, die Wellengleichung die Anfangsdaten u_0 nur transportiert und nicht glättet.