3. Modellierung / elementare Eig. einiger PDGL

Beispiel f. Modellierung: Man erhitzt einen Metallkörper Ω indem man dauerhaft den Rand $\partial\Omega$ gemäß einer vorgegebenen Temperaturverteilung u_0 erwärmt. Auf Dauer stellt sich eine feste Temperaturverteilung u mit $u|_{\partial\Omega} = u_0$ in Ω ein. Wie kann man sie berechnen?

Modellierung $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $u = u(x)$ ist die Temperatur am Punkt $x \in \Omega$ also $u : \Omega \to \mathbb{R}$ Fkt.

In $x \in \Omega$ gebe $j(x) \in \mathbb{R}^3$ die Richtung an, in die Wärmeenergie transportiert wird und deren Betrag s.u.

Betrachte ein Volumen $V \subset \Omega$. Nach langer Zeit ändert sich die Wärmeverteilung in V nicht mehr, es darf also keine Wärme in oder aus V transportiert werden, d.h. mit dem Normalenvektor ν von ∂V gilt:

$$\int_{\partial V} \langle j, \nu \rangle \, dS = 0$$

herausgehende Wärmeenergie = eindringende Wärmeenergie

Also nach dem Satz von Gauß

$$\int_V \operatorname{div} j \, d\lambda = \int_{\partial V} \langle j, \nu \rangle \, dS = 0 .$$

Da V bel. war, folgt $\operatorname{div} j = 0$ (falls z.B. $(\operatorname{div} j)(x_0) > 0$ so ex. $V \ni x_0$ mit $(\operatorname{div} j)(x) \geq \varepsilon > 0$ f. ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in V$
$\Rightarrow \int_V \operatorname{div} j \, d\lambda \geq \varepsilon \operatorname{vol}(V) > 0$)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten wie u und j zusammenhängen können, je nach der physikalischen Situation.

Die einfachste ist das Fouriersche Gesetz: Wärme strömt vom warmen zum kalten Bereich. Die Geschwindigkeit ist proportional zum Temperaturunterschied, also

$$j = -a \operatorname{grad} u \qquad (-\operatorname{grad} u \text{ hat die Richtg. des stärksten Abfalls von } u)$$

Die Konstante $a > 0$ interpretiert man als Leitfähigkeit des Materials.

Zusammen mit $\operatorname{div} j = 0$ erhält man:

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$$ d.h. die Laplace Gleichung unter der Randbedingung

$$u|_{\partial\Omega} = u_0 .$$

<u>Varianten</u> 1) Falls die Leitfähigkeit a innerhalb Ω variiert also $a = a(x)$, so erhält man allgemeiner die PDGL

$$\operatorname{div}(a \operatorname{grad} u) = 0$$
$$u|_{\partial\Omega} = u_0 .$$

2) Falls Wärmequellen in Ω ex., die im Pkt. $x \in \Omega$ die Wärmemenge $f(x)$ erzeugen, so erhalten wir f. alle $V \subset \Omega$

herausfließende Wärme $\rightarrow$ $$\int_{\partial V} \langle j, \nu \rangle \, dS = \int_V f(x)\, d\lambda$$ $\swarrow$ erzeugte Wärme

also $$\int_V \operatorname{div} j \, d\lambda = \int_V f(x)\, d\lambda$$

also $$\operatorname{div} j = f$$

und mit $j = -a \operatorname{grad} u$ also

$$-\operatorname{div}(a \operatorname{grad} u) = f \quad \text{mit } a = a(x).$$

Speziell für konst. a ergibt sich die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f$$

unter der Randbdg. $u|_{\partial\Omega} = u_0$.

$u = u(x)$

3) Falls wir nicht nur den stationären Endzustand der Temperatur in Ω betrachten sondern auch die zeitliche Entwicklung $u = u(t,x)$ dahin, so ist der Wärmestrom aus V heraus also $\int_{\partial V} \langle j,\nu\rangle \, dS$ nicht notwendig Null sondern gleich der Abnahme der Temperatur $-\frac{d}{dt}\int_V u \, d\lambda$ in V, d.h. es gilt für alle V

$$\int_V \operatorname{div} j \, d\lambda = \int_{\partial V} \langle j,\nu\rangle \, dS = -\int_V \frac{\partial u}{\partial t} \, d\lambda .$$

Es folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} j$$

also mit $j = -a \operatorname{grad} u$ die Gleichg.:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a \operatorname{grad} u) \quad \text{für allg. } a = a(x).$$

Bei konstanter Leitfähigkeit $a = 1$ erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u , \quad u|_{\partial\Omega} = u_0$$

die "Wärmeleitungsgleichung".

Diese Gleichungen treten auch in ganz anderen physikalischen Zusammenhg. auf. z.B. beschreibt $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = u_0$ auch die Ladungsverteilung in einem Körper Ω bei angelegter Spannung u_0.

Beispiele f. Modellierung anderer Phänomene durch PDGL

- elektromagnetische Wellen (Maxwell-Gleichungen)
- Aufenthaltswahrscheinlichkeit quantenmechanischer Teilchen (Schrödinger Gleichungen)
- Elastizität (Kräfte in Bauwerken, Werkstoffen)
- Strömungen von Flüssigkeiten, (Navier Stokes Gleichg.) oder von Gasen
- Schall Ausbreitung
- Verbrennungsvorgänge
- Elektrochemische Vorgänge
- Schall- und sonstige Wellen

etc. etc.

Typische Fragestellungen

Existenz hat die PDGL Lösg.?

Eindeutigkeit sind die Lösg. unter geeigneten Randbedg. eind.?

Regularität wie oft diffbar sind die Lösg.?

Eigenschaften Kann man die Lösg. charakterisieren

Die Numerik von PDGL fragt darüber hinaus nach Möglichkeiten Lösg. angenähert zu berechnen unter Einhaltung gegebener Schranken f. den Fehler

Wir diskutieren im folgenden einige Eigenschaften verschiedener Typen von PDGL.

Wir beginnen mit der Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Bez.: Für Ω mit Lipschitz Rand setze

$$\fint_{\partial\Omega} u \, dS := \frac{1}{\mathrm{vol}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u \, dS \qquad (\text{Mittelwert über } \partial\Omega)$$

wobei $\mathrm{vol}(\partial\Omega) := \int_{\partial\Omega} 1 \, dS$ ist.

Es gilt nun:

Satz 3.1 Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$. Dann gilt für jede abg. Kugel $B_r(x) \subset \Omega$ die Mittelwertformel:

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u \, dS$$

Bew.: Sei x fest und setze

Transf. Formel

$$\Phi(r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS(y) = \fint_{\partial B_1(0)} u(x+rz) \, dS(z).$$

Mit dem Satz von Lebesgue z.B. sieht man, daß gilt:

$$\Phi'(r) = \fint_{\partial B_1(0)} \frac{\partial}{\partial r} u(x+rz) \, dS(z)$$

$$= \fint_{\partial B_1(0)} \langle (\mathrm{grad}\, u)(x+rz), z \rangle \, dS(z)$$

$$= \fint_{\partial B_r(x)} \langle (\mathrm{grad}\, u)(y), \frac{y-x}{r} \rangle \, dS(y)$$

Transf. Formel

$$= \fint_{\partial B_r(x)} \langle \mathrm{grad}\, u, \nu \rangle \, dS(y)$$

Mit dem Gaußschen Satz folgt

$$\mathrm{vol}(\partial B_r(x))\, \Phi'(r) = \int_{B_r(x)} \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, u \; d\lambda$$

$$= \int_{B_r(x)} \Delta u \; d\lambda = 0 \quad \text{da } \Delta u = 0 .$$

Also ist $\Phi'(r)$ d.h. $\Phi(r)$ konstant. Wir erhalten:

$$\Phi(r) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi(\varepsilon) \underset{u \text{ stetig}}{=} u(x)$$

also die Beh.

Die Mittelwerteigenschaft charakterisiert harmonische Fkt.

Satz 5.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ mit

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u \; dS$$

für alle Kugeln $B_r(x) \subset \Omega$. Dann ist $\Delta u = 0$.

Bew.: Die Rechnung des vorigen Beweises liefert für

$$\Phi(r) = \fint_{\partial B_r(x)} u \; dS$$

$$|\partial B_r(x)|\, \Phi'(r) = \int_{B_r(x)} \Delta u .$$

Wir nehmen nun an daß für ein $x_0 \in \Omega$ gilt $(\Delta u)(x) = \varepsilon > 0$.
Da $u \in C^2$ ist, ist Δu stetig. Also ex. ein $B_R(x) \subset \Omega$, $R > 0$

mit $\Delta u \geq \varepsilon/2$ in $B_R(x)$. Nach Vor. ist $\Phi(r) = u(x)$ unabh. von r, also $\Phi'(r) = 0$ f. alle r, also

$$0 = \int_{B_R(x)} \Delta u \, d\lambda \geq \frac{\varepsilon}{2} \, \mathrm{vol}(B_R(x)) \qquad ↯ .$$

Wir zeigen als nächstes, daß harmonische Fkt. immer C^∞ sind. Hierzu brauchen wir folgende Folgerung aus Satz 3.1:

<u>Satz 3.3</u> Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ und $B_R(0) \subset \Omega$. Sei $\varphi : [0,R] \to \mathbb{R}$ integrierbare Fkt. mit $\int_{B_R(0)} \varphi(\|y\|)\,dy = 1$.
Dann gilt:

$$u(x) = \int_{B_R(x)} u(y)\, \varphi(\|y-x\|)\, dy .$$

<u>Beweis:</u> Mit der Def. des Oberflächenintegrals und der Transformationsformel rechnet man nach, daß für jede über $U_R(x)$ integrierbare Funktion f gilt:

$$(*) \qquad \int_{B_R(x)} f(y)\, dy = \int_0^R \int_{\partial B_r(x)} f(y)\, dS(y)\, dr$$

Mit dieser Formel erhalten wir

$$\int_{B_R(x)} u(y)\, \varphi(\|y-x\|)\, dy = \int_0^R \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, \varphi(r)\, dS(y)\, dr$$

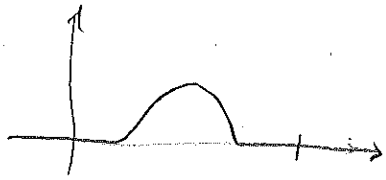
$$\overset{\text{Satz (3.1)}}{=} u(x) \int_0^R \mathrm{vol}(\partial B_r(x))\, \varphi(r)\, dr$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (*) \text{ mit } x=0,\ f(y) = \varphi(\|y\|)}}{=} u(x) \int_{B_R(0)} \varphi(\|y\|)\, dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Voraus. an } \varphi}}{=} u(x)$$

Kor. 3.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und für $u \in C^2(\Omega)$ gelte $\Delta u = 0$. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$.

Bew.: Zu $x_0 \in \Omega$ wähle ein $R > 0$, so daß $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$ ist. Für alle Punkte $x \in U = U_R(x_0)$ gilt dann $B_R(x) \subset \Omega$.

Wähle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ wie folgt:



R^2

und normiere ψ so, daß für $\varphi(r) = \psi(r^2)$ gilt

$$\int_{B_R(0)} \varphi(\|x\|)\, dx = 1 .$$

Zu $x \in U = U_R(x_0)$ hat die Funktion $y \mapsto u(y)\varphi(\|y-x\|)$ auf $U_R(x)$ kp. Träger in $U_R(x)$, kann also C^∞ in x durch Null auf $\mathbb{R}^n \setminus U_R(x)$ fortgesetzt werden. Nach Satz 3.3 gilt daher

$$u(x) = \int_{B_R(x)} u(y)\varphi(\|y-x\|)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(\|y-x\|)\, dy$$

für alle $x \in U$. Es gibt also einen Würfel $K = [-T, T]^n$ so daß gilt

$$u(x) = \int_K u(y)\varphi(\|y-x\|)\, dy \qquad \text{für alle } x \in U .$$

Die Funktion $\varphi(\|x\|) = \psi(\|x\|^2) = \psi(\sum x_i^2)$ ist C^∞. Also ist der Integrand eine C^∞-Fkt von x und alle part. Abl. nach x sind stet. in (x, y). Also ist auch $u = u(x)$ eine C^∞-Fkt. von x.

Eine fundamentale Eigenschaft harmonischer Funktionen ist das folgende Max. Prinzip:

<u>Satz 3.5 (Max Prinzip)</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω. Dann gilt:

(1) $$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

(2) Falls Ω zshgd. ist und u das Maximum auf $\overline{\Omega}$ in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ annimmt, so ist u konstant.

<u>Bew.</u>: (2) Sei $u(x_0) = M = \max_{\overline{\Omega}} u$ f. ein $x_0 \in \Omega$. Für jede Kugel $B_r(x_0) \subset \Omega$ gilt:

$$\fint_{\partial B_r(x_0)} u \, dS = u(x_0) = M \quad \text{und} \quad u \leq M.$$

Da u stet. auf $\partial B_r(x_0)$ ist, folgt $u = M$ auf $\partial B_r(x_0)$

[sonst wäre $u(x_1) < M$ f. ein $x_1 \in \partial B_r(x_0)$, also
$u(x) \leq M - \varepsilon$ f. ein $\varepsilon > 0$ und alle x in off. $x_1 \in V \subset \partial B_r(x_0)$

Dann wäre

$$\fint_{\partial B_r(x_0)} u \, dS = \fint_V u \, dS + \int_{\partial B_r(x_0) \setminus V} u \, dS$$

$$\leq (M - \varepsilon) \fint_V 1 \, dS + M \fint_{\partial B_r(x_0) \setminus V} 1 \, dS$$

$$= M \fint_{\partial B_r(x_0)} 1 \, dS - \varepsilon \fint_V 1 \, dS = M - \varepsilon \fint_V 1 \, dS$$

$$< M \quad \lightning \quad]$$

Da $0<r\ll 1$ bel. war hat x_0 eine off. Umgebg. auf der $u = M$ ist. Die Menge $\mathcal{M} = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$ ist also offen und wegen $x_0 \in \mathcal{M}$ nicht leer. Andererseits ist sie offen, da u stet. ist. Da Ω zushgd. ist folgt $\Omega = \mathcal{M}$ also (2).

<u>Erinnerung</u> Ein top. Raum X heißt zushgd, wenn es keine Zerlegung $X = A \dot\cup B$ gibt mit A, B abg. nicht-leer.
<u>Äquiv.</u>: Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ offen und abg. Dann ist $X = A$.
Sonst wäre $B = X \setminus A \neq \emptyset$, abg. und $X = A \dot\cup B$.
<u>Fakt</u> Jeder wegzushgd. top. Raum X ist zushgd.

<u>Bew. von (1)</u> Da u stet. auf $\bar\Omega$ ist nimmt u sein Max. auf der kp. Menge $\bar\Omega$ an. Falls das Max. in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ angenommen wird, so ist u nach (2) auf der Zushgskomp. Ω_0 von Ω in der x_0 liegt <u>konstant</u>. Also nimmt u das Max auch auf $\partial\Omega$ an.

<u>3.6 Korollar</u> (Eindeutigkeit bei der Poisson-Gleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $g \in C^0(\partial\Omega)$ und $f \in C^0(\Omega)$ gegeben. Dann ex. höchstens ein $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega)$ welches die Poisson Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

mit Anfgsbdg.: $\quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \quad$ löst.

<u>Beweis</u>: Seien u, v zwei Lösg. Die Differenz $w = u - v$ ist auf Ω harmonisch und $=0$ auf $\partial\Omega$. Nach Satz 3.5 gilt $w \leq 0$ in $\bar\Omega$. Vertauschen von u, v zeigt: $-w \leq 0$.
Also ist $w = 0$ in $\bar\Omega$, d.h. $u = v$.

Das Dirichlet-Prinzip: Physikalische Systeme möchten Zustände einnehmen, für die die Energie minimal wird. Für $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ betrachten wir das Dirichlet (Energie) Funktional

$$E(u) = \int_\Omega \|\operatorname{grad} u\|^2 \, d\Omega .$$

Wir fixieren nun Randbdg., d.h. eine stet. Fkt. $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ und betrachten E auf der Menge:

$$X := \{ u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = g \} .$$

Hier gilt das fundamentale Extremalprinzip:

<u>Satz 3.7</u> (Dirichlet-Prinzip) Sei Ω offen beschränkt und $u \in X$ eine Funktion mit

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v) .$$

Dann ist u eine harmonische Funktion.

<u>Bem.</u>: Wenn man also zeigen kann, daß E ein Minimum auf X besitzt, so hat man die Lösbarkeit der Laplace Gleichung $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = g$ gezeigt.