Wir betrachten wieder den Diff. Op.:

$$Lu = -\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) + \langle b, \operatorname{grad} u\rangle + cu$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + c$$

wobei $A = A(x) = (a^{ji}(x))$, $b = b(x) = (b^i(x))$, $c = c(x)$.

Sei

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle A \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + \langle b, \operatorname{grad} u\rangle v + cuv \, d\Omega$$

Falls A, b, c L^∞ sind def. dies eine Bil. Form auf $H^1(\Omega)$.
Ist $f \in L^2(\Omega)$ so def. f ein El. von $H^{-1}(\Omega)$ durch $(f, -)_{L^2}$
d.h. durch $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi \, d\Omega$. Nach (6.8) heißt $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösg. von

$$Lu = f$$

falls gilt

$$a(u,\varphi) = (f,\varphi)_{L^2} \quad \text{f. alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Wir wollen nun unter der Annahme gleichmäßigen Elliptizität von A einen Regularitätssatz f. schwache Lösg. zeigen:

(7.3) Satz (Innere H^2-Regularität) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ off. beschr. Lipschitz, sowie $a^{ij} \in C^1(\Omega)$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Es gelte

(*) $\qquad \langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \gamma |\xi|^2$ f. alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$

mit einem $\gamma > 0$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lösung von $\qquad Lu = f.$

Dann gilt f. alle offenen $\Omega' \subset\subset \Omega$, daß $u \in H^2(\Omega')$ ist und es gilt die Abschätzung:

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Hierbei hängt C nur ab von Ω', Ω und den Koeff. von L.