Auktionen als Anwendung der Spieltheorie

Vitali Gretschko

Zaferna 2010

Universität zu Köln

Agenda

1. Wozu Spieltheorie?
2. Einfache Gleichgewichtskonzepte
3. Auktionen als Anwendung

Wozu Spieltheorie?

Traditionelle Mikro:

- individuelle Entscheidungsprobleme: Theorie des Haushalts, Monopole
- Markt: Konsumenten/Unternehmen agieren als Preisnehmer

Spieltheorie:

- multilaterale Entscheidungsprobleme: „Strategische Entscheidungen“

  Entscheidungen beeinflussen sich gegenseitig

- Beispiele:

IO:	- Oligopole, Kartelle
Mikro:	- Auktionen, Verhandlungen
FW:	- öffentliche Güter, Gewerkschaften/Arbeitgeber
PO:	- Wahlen, Aufrüstung
AH:	- Handelskriege

Zur Geschichte der Spieltheorie

1944	John von Neumann and Oskar Morgenstern veröffentlichen *Theory of Games and Economic Behaviour*
1950-53	John Nash veröffentlicht seine wegweisenden Arbeiten zum N.-Gleichgewicht und zur N.-Lösung für Verhandlungsspiele.
1965	Reinhard Selten entwickelt das Konzept der Teilspielperfektheit (Rückwärtsinduktion), und 1975 das “trembling hand concept”
1994	Harsanyi, Nash und Selten erhalten den Nobelpreis
1996	Mirrlees und Vickery erhalten den Nobelpreis
2005	Aumann und Schelling erhalten den Nobelpreis
2007	Mayerson, Maskin und Hurwizc erhalten den Nobelpreis
1990er	- Praktische Anwendungen: Auktionen (FCC, UMTS) - Theoretische Entwicklungen: Evolutionäre Spieltheorie - Kritische Betrachtung der Spieltheorie: Experimente

Teilgebiete der Spieltheorie

1. Statische Spiele mit vollständiger Information
   $\rightarrow$ Nash-Gleichgewicht

2. Dynamische Spiele mit vollständiger Information
   $\rightarrow$ Teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht

3. Statische Spiele mit unvollständiger Information
   $\rightarrow$ Bayesianisches Nash-Gleichgewicht

4. Dynamische Spiele mit unvollständiger Information
   $\rightarrow$ Perfektes Bayesianisches Nash-Gleichgewicht

5. Neuere Entwicklungen in der Spieltheorie
   $\rightarrow$ Global Games, Evolutionary Game Theory, Behavioral Economics, Mechanism Design.

Inhaltsverzeichnis

1. Wozu Spieltheorie?
2. $\boxed{\text{Einfache Gleichgewichtskonzepte}}$
3. Auktionen als Anwendung

Nash - Gleichgewicht

Beispiel: **The Battle of the Sexes**

		Petra: Fußball	Petra: Oper
Christian	Fußball	2, 1	0, 0
	Oper	0, 0	1, 2

Definition

Eine Strategienkombination $s^*=(s_1^*, s_2^*,..., s_n^*)$ bildet ein **Nash-Gleichgewicht**, falls für alle Spieler i gilt:

$$u_i\,(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i\,(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$$

D.h., s_i^* ist eine beste Antwort von Spieler i auf die Strategien der andern

$\rightarrow$ Nash Gleichgewicht sind **gegenseitig beste Antworten** !

Statische Spiele mit unvollständigen Informationen

- Spieler: $i \in \{1,2,...,n\}$

- Aktionen von Spieler i: $a_i \in A_i$

- **Typ** von Spieler i: $\theta_i \in \Theta_i$

- (Typenabhängige) Auszahlung von Spieler i ("private values"):

$$u_i = u_i\,(a_1, a_2,..., a_n, \theta_i) \equiv u_i\,(a, \theta_i) \equiv u_i\,(a_i, a_{-i}, \theta_i)$$

- **Belief** (Einschätzung) von Spieler i: $p_i\,(\theta_{-i} | \theta_i)$

Vielfach:

(i) Belief typenunabhängig: $p_i\,(\theta_{-i} | \theta_i) = p_i(\theta_{-i})$

(ii) Beliefs stochast. unabh.: $p_i\,(\theta_{-i}) = \prod_{j \neq i} p(\theta_j)$

(iii) „**Common Values**“: $u_i\,(a, \theta_i, \theta_{-i})$

Schreibweise:

$$G = \{A_1, ..., A_n; \Theta_1, ..., \Theta_n; p_1, ..., p_n; u_1,..., u_n\}$$

Bayesianisches Nash-Gleichgewicht

Definition:

Eine **Strategie** in einem statischen Bayesianischen Spiel G für Spieler i ist eine Funktion $s_i(\theta_i)$, die jeden Typ $\theta_i \in \Theta_i$ in den Raum der Aktionen A_i abbildet.

Bemerkung:

Obwohl jeder Spieler seinen Typ kennt, spezifiziert die Strategie eine Aktion für jeden (aus der Sicht der anderen) möglichen Typ.

Definition:

Die Strategien $s^*=(s_1^*, ..., s_n^*)$ sind ein **Bayesianisches Nash-GG** (in reinen Strategien) falls für jeden Spieler $i \in \{1,2,...,n\}$ und jeden möglichen Typ $\theta_i \in \Theta_i$ $s_i(\theta_i) = a_i$ folgenden Ausdruck maximiert:

$$\sum_{\theta\text{-}i \,\in\, \Theta\text{-}i} p_i(\theta_{-i}|\,\theta_i)\, u_i(s_1^*(\theta_1), ..., s_{i-1}^*(\theta_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(\theta_{i+1}), ..., s_n^*(\theta_n), \theta)$$

Inhaltsverzeichnis

Die Auktionstheorie als Forschungsgegenstand

•Das Gebiet der Auktionen ist ein Teilgebiet des Mechanismus Design.

•Die Frage ist: In welcher Umgebung, setze ich welchen Mechanismus ein um ein Gut zu allokieren

•Verschiedene Kriterien können entscheidend sein

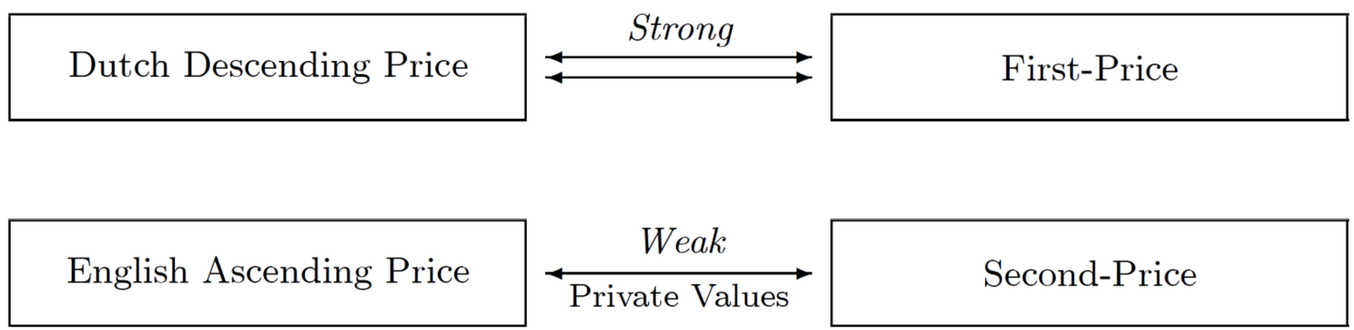
•Die Hauptkriterien sind Effizienz und Umsatz

•Auktionen sind einfache Mechanismen, die sich leicht implementieren lassen

•Oft ist eine Auktion auch ein optimaler Mechanismus

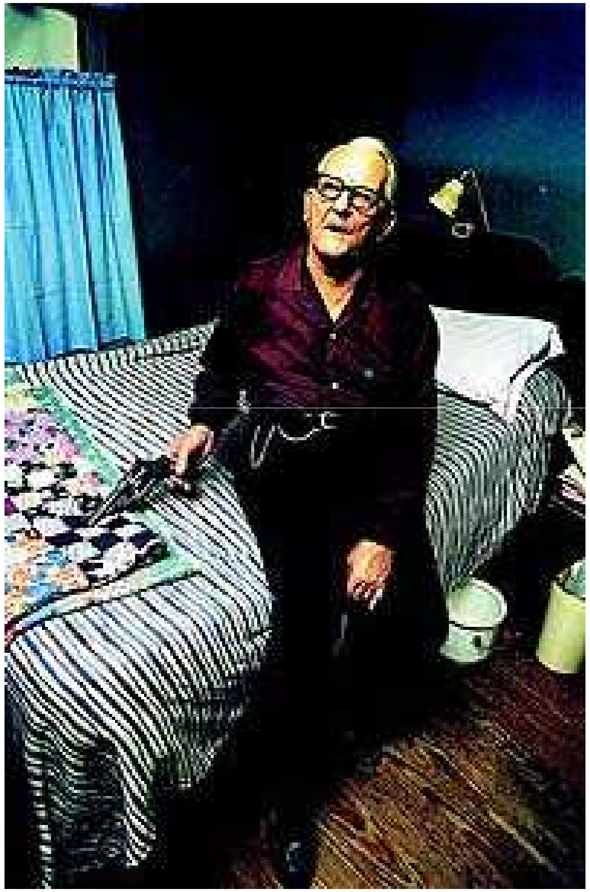
Verschiedene Auktionsformate

Ein Objekt:



Mehrere Objekte:

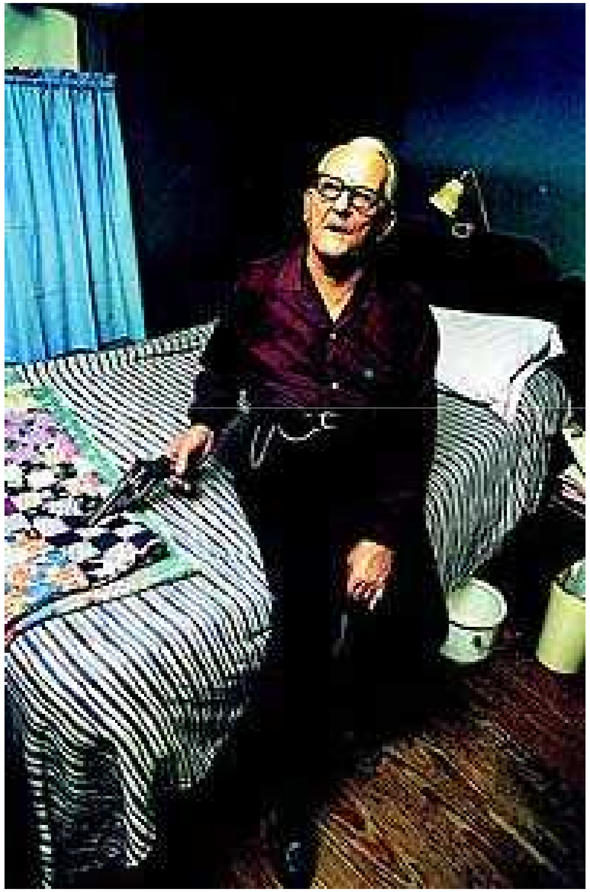
Ein Experiment II



Es werden **zwei** seltene Abzüge einer Arbeit von August Sandler versteigert. Sie sind auf dem Dachboden gefunden wurden und der Wert ist unklar. Ihr habt geschätzt was es euch Wert wäre das Bild zu besitzen. Eure Schätzung befindet sich auf der Rückseite des Namensschildes. Die Einschätzungen der Werte der anderen Auktionsteilnehmer sind unabhängig gleichverteilt auf dem Intervall [0, 100.000].

Der Auktionator ruft die Preise aus, beginnend bei 100.000 und senkt kontinuierlich den Preis. Wer als erstes die Hand hebt gewinnt das erste Bild und zahlt den aktuell ausgerufenen Preis. Danach geht die Auktion für das zweite Bild weiter ab dem erreichten Preis.

Ein Experiment



Es werden **zwei** seltene Abzüge einer Arbeit von August Sandler versteigert. Sie sind auf dem Dachboden gefunden wurden und der Wert ist unklar. Ihr habt geschätzt was es euch Wert wäre das Bild zu besitzen. Eure Schätzung befindet sich auf der Rückseite des Namensschildes. Die Einschätzungen der Werte der anderen Auktionsteilnehmer sind unabhängig gleichverteilt auf dem Intervall [0, 100.000].

Bitte schreibt euer Gebot für eine der beiden Fotografien beim Essen auf die Rückseite des Namenschildes. Die beiden höchsten Gebote gewinnen.

Gewinner: Martin 90.000 / 90.000
Paul 88.800 / 98.800

Das Grundmodell

Spieler: N Bieter, K Objekte

Typen = Wertschätzung: Valuation (Typ) $x_i \in [0,1]$, Verteilung (Belief) $F(x)$, Dichte $f(x)$

Aktionen: $b_i \in [0, \infty)$

Nutzen: $x_i - b_i$ falls Bieter i ein Objekt bekommt und 0 falls er das Objekt nicht bekommt

Erwarteter Nutzen: $Prob(b_i > b_{(k)})(x_i - b_i)$

Die Wertschätzungen der Bieter können als Zufallsvariablen X_i gesehen werden, die unabhängig aus der Verteilung F gezogen werden

Die Anordnung der Zufallsvariablen X_i nennt man Ordnungsstatistik. Jede Ordnungsstatistik ist selber eine Zufallsvariable: $Y_1^{(N)}$

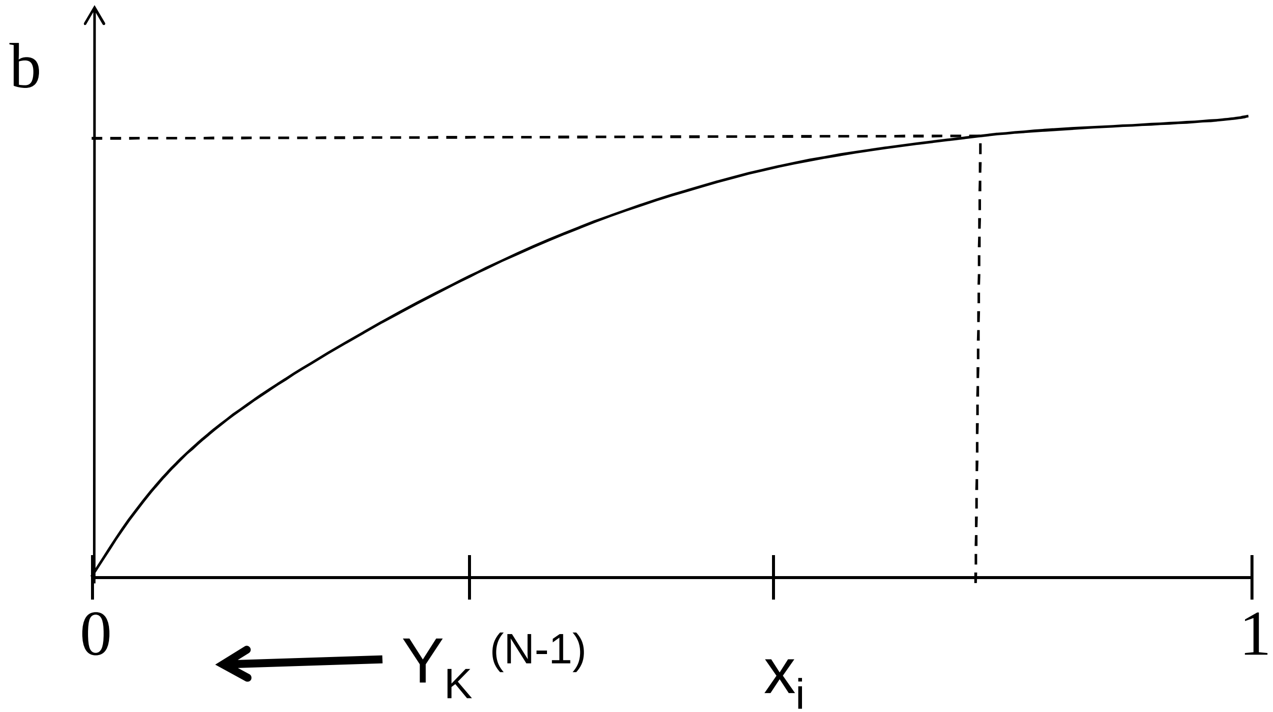
Einfacher Lösungsansatz

1. Man nehme an, es existiert eine monoton steigende, differenzierbare Gebotsfunktion, die jedem möglichen Typen ein Gebot zuordnet
2. Unter der Annahme, dass sich alle bis auf Spieler i an diese Funktion halten, maximiert man den Erwartungsnutzen von Spieler i.
3. Aus dem Maximierungsproblem bekommt man eine notwendige Bedingung in Form einer impliziten gewöhnlichen Differenzialgleichung
4. Nun bestimmt man die Gebotsfunktion so, dass es für Spieler i ebenfalls optimal ist sich an die Gebotsfunktion zu halten
5. Anschließend lässt sich zeigen, dass die aus der notwendigen Bedingung bestimmte Funktion tatsächlich ein Gleichgewicht darstellt.

Die Gleichgewichtsgebotsfunktionen I

First Price:

$$\beta^S(x) = E[Y_K^{(N-1)} | Y_K^{(N-1)} < x]$$



Die Gleichgewichtsgebotsfunktionen II

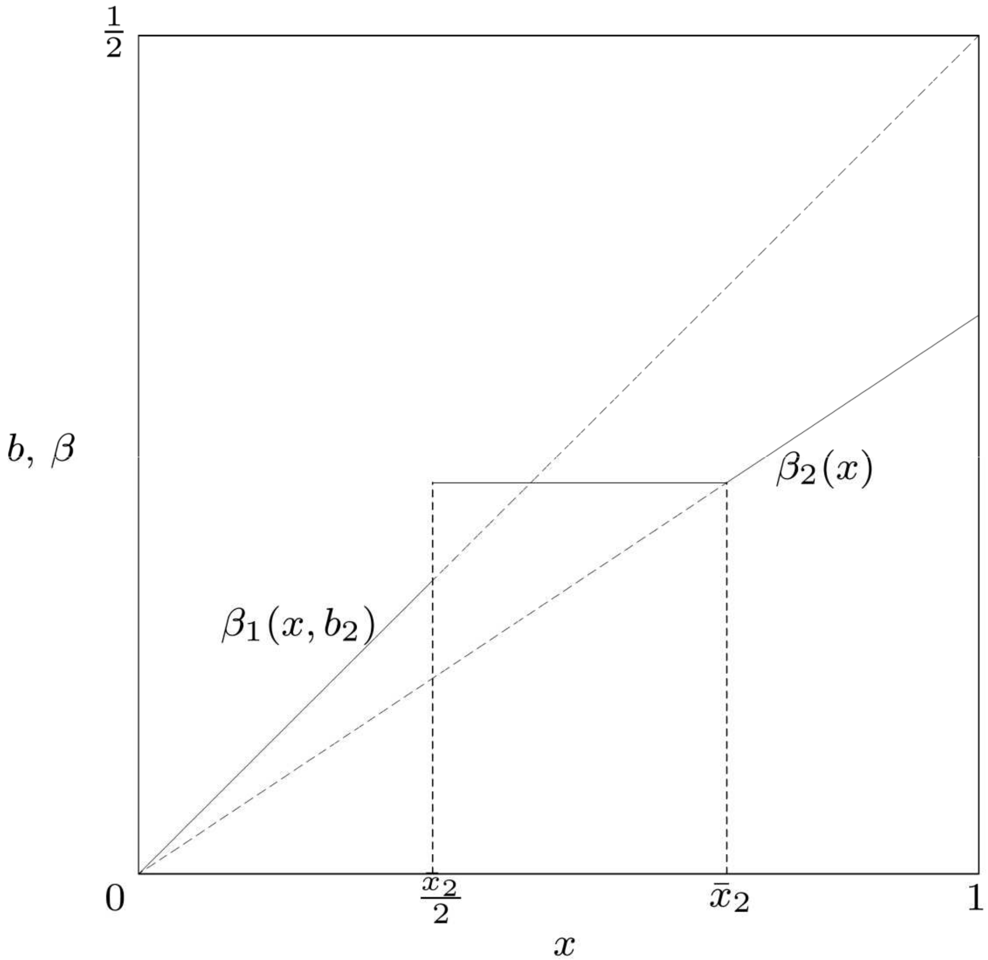
Dutch:

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_K\}$$

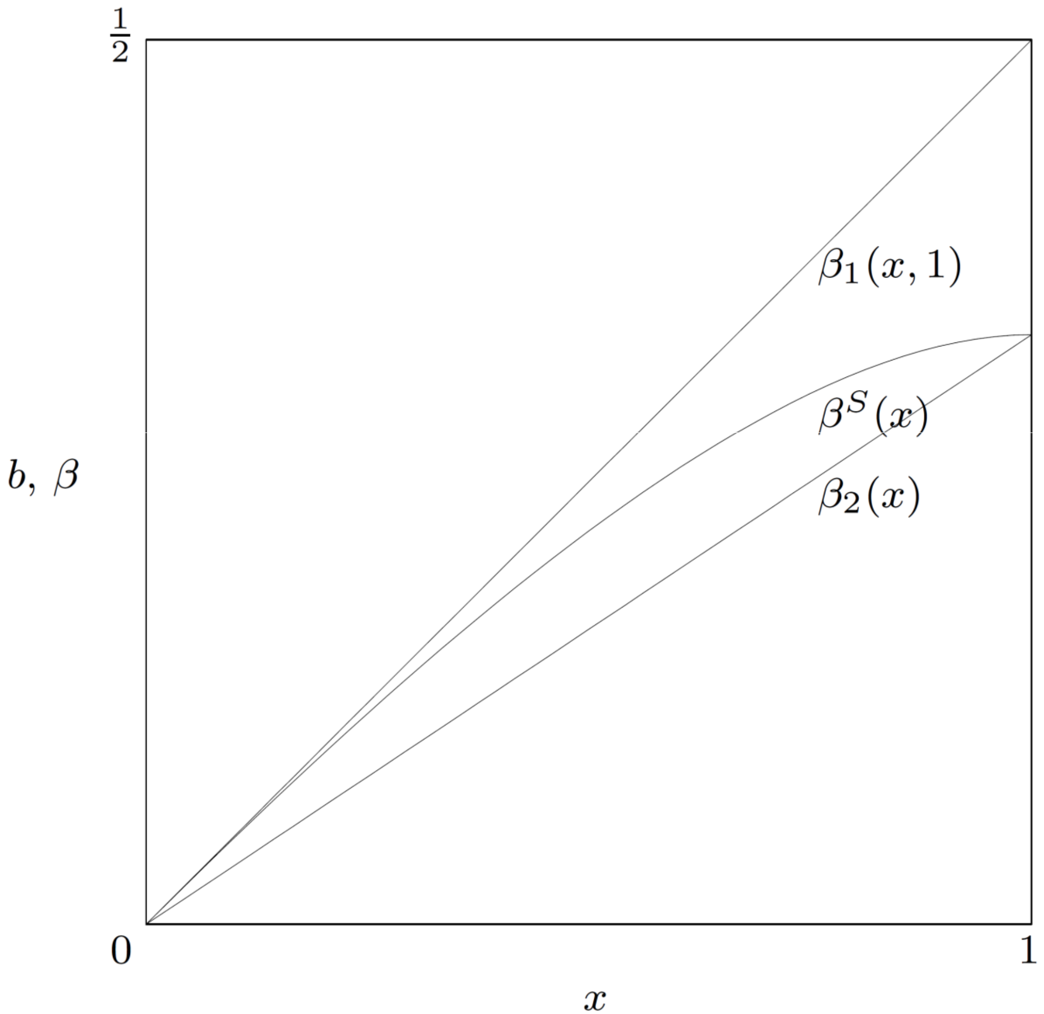
$$\beta_k(x, b_{k+1}) = \begin{cases} \bar{\beta}_k(x) & \text{if } x \leq c_k(b_{k+1}, r) \\ b_{k+1} & \text{if } x > c_k(b_{k+1}, r) \end{cases}$$

$$\bar{\beta}_k(x) = E[Y_{K-k}^{(N-1)} | Y_1^{(N-1-(K-k))} < x]$$

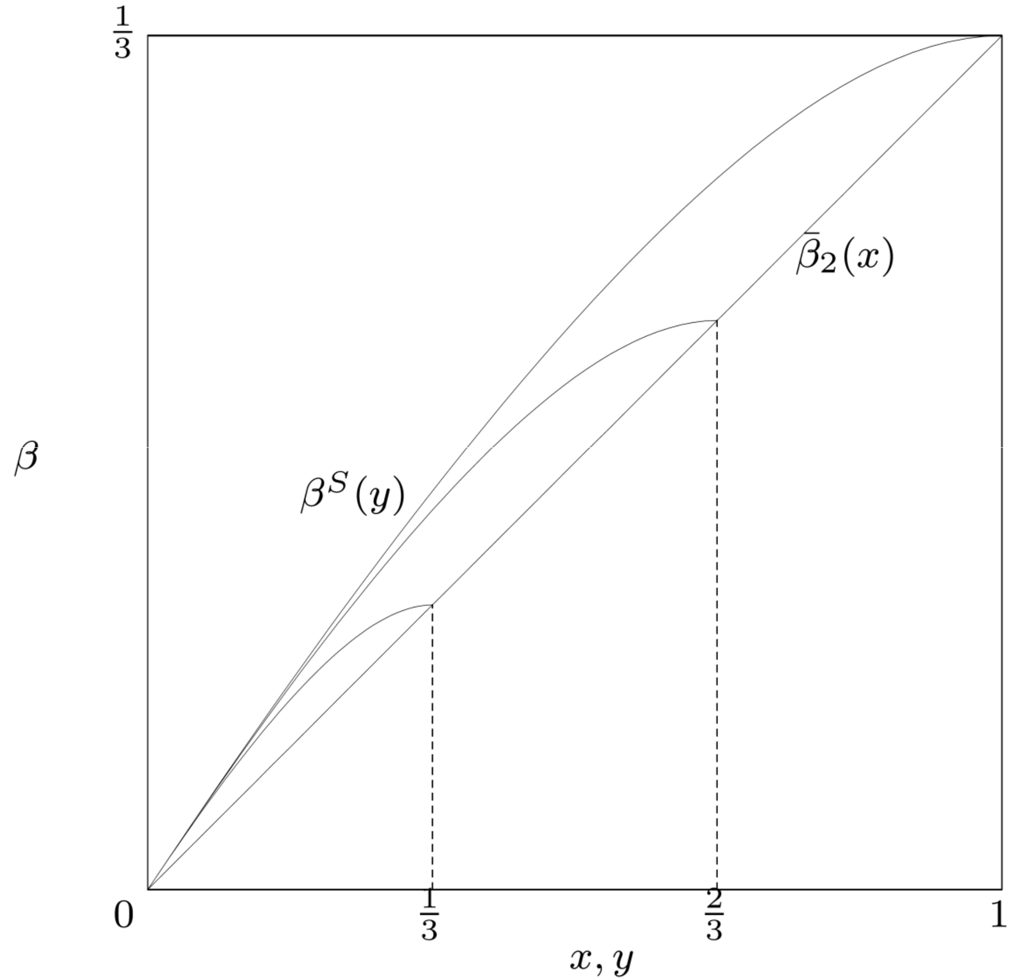
Das „Dutch Gleichgewicht“



Vergleich der beiden Strategien



Die Herleitung



Fragen?

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit.