Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Theorie und Anwendung optimaler Multiprozesse mit Zustandsbeschränkungen

Vortrag Skiseminar 2011

Bahne Christiansen

19. Februar 2011

> Übersicht

1.) Einführende Beispiele

> Übersicht

> Übersicht

> Übersicht

> Übersicht

> Übersicht

1.) Einführende Beispiele

2.) Gewöhnliche optimale Steuerprozesse

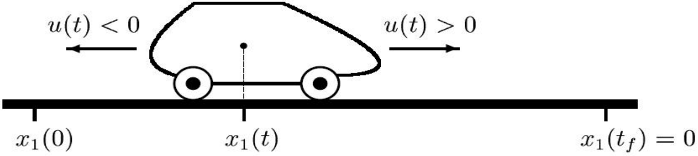
3.) Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen

4.) Optimale Multiprozesse mit Zustandsbeschränkungen

5.) Komplexeres Anwendungsmodell: Der Voice Coil–Motor

> Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Skizze:



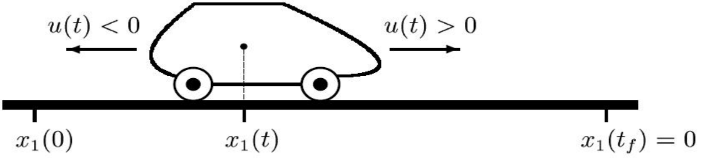
Relevante Größen:

$x_1(t)$: Position des Wagens zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$,
$x_2(t)$: Geschwindigkeit des Wagens zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$,
$u(t)$: Beschleunigung des Wagens zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$.

Ziel: Steuere den Wagen in minimaler Zeit T vom Startpunkt $x_1(0) = -4$ zum Endpunkt $x_1(T) = 0$ ($x_2(0) = x_2(T) = 0$).

> Zeitoptimale Steuerung des Wagens

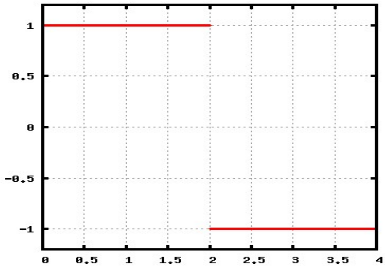
$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & F(x,u) = T \\
\text{unter} \quad & \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad 0 \le t \le T, \\
& \dot{x}_2(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T, \\
& x_1(0) = -4,\ x_1(T) = 0, \\
& x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \\
& u(t) \in [-1, 1], \quad 0 \le t \le T.
\end{aligned}
$$



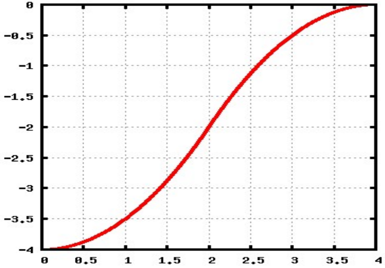
> Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Maximale Beschleunigung: $|u(t)| \leq 1, \; t \in [0, T]$.

Lösung: $T = 4$.



Beschleunigung $u(t)$

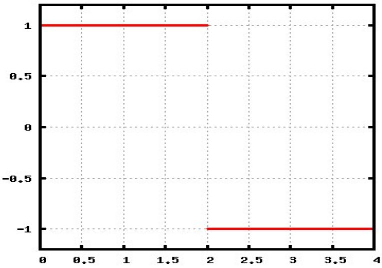


Position $x_1(t)$

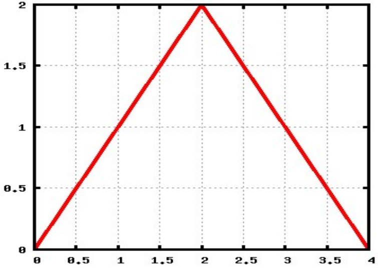
> Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Maximale Beschleunigung: $|u(t)| \leq 1, \ t \in [0, T]$.

Lösung: $T = 4$.



Beschleunigung $u(t)$

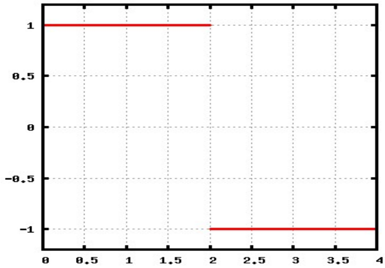


Geschwindigkeit $x_2(t)$

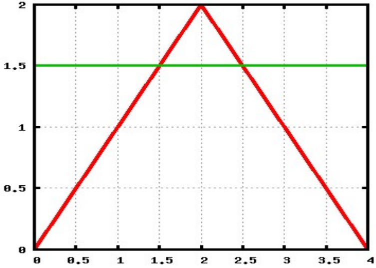
> Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Maximale Beschleunigung: $|u(t)| \leq 1, \ t \in [0, T]$.

Lösung: $T = 4$.



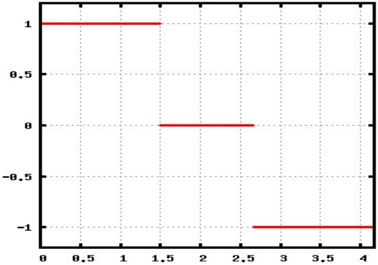
Beschleunigung $u(t)$



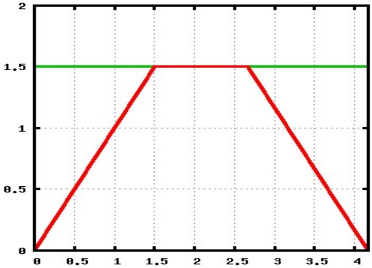
Geschwindigkeit $x_2(t)$

> Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Maximale Beschleunigung: $|u(t)| \leq 1, \; t \in [0, T]$.
Maximale Geschwindigkeit: $|x_2(t)| \leq 1.5, \; t \in [0, T]$.
Lösung: $T = 4.167$.



Beschleunigung $u(t)$



Geschwindigkeit $x_2(t)$

> Modellbeschreibung des Roboterarms

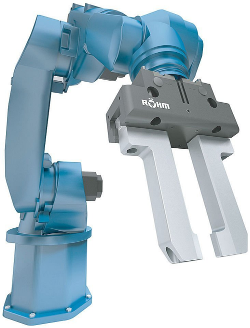


Abb.: Industrieller Greifarm

Zustandsvariablen:

$x_1(t)$: Position des Roboterarms
$x_2(t)$: Geschwindigkeit des Roboterarms

Steuerung $u(t)$: Beschleunigungskraft

Systemparameter:

m_1: Masse des Roboterarms
m_2: Masse der Transportlast

Optimale Steuerung des Roboterarms als Multiprozess

Minimiere die Endzeit T

unter

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad \text{für } 0 \le t \le T,$$

$$\dot{x}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{m_1+m_2}\, u(t) & \text{für } 0 \le t < t_1, \\ \frac{1}{m_1}\, u(t) & \text{für } t_1 \le t \le T, \end{cases}$$

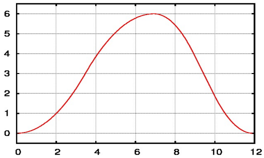
$$x_1(0) = x_1(T) = a, \qquad x_2(0) = x_2(T) = 0,$$

$$x_1(t_1^-) = x_1(t_1^+) = b, \qquad x_2(t_1^+) = \frac{m_1+m_2}{m_1} x_2(t_1^-),$$

$$|\, u(t)\,| \le u_{\max}, \qquad \text{für } t \in [0,\ T],$$

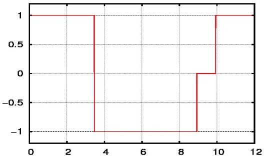
$$-c \le x_2(t) \le c, \qquad \text{für } t \in [0,\ T].$$

$> a = 0,\ b = 6,\ m_1 = m_2 = 1,\ u_{\max} = 1,\ |x_2(t)| \leq 2$

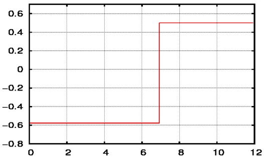


Position $x_1(t)$

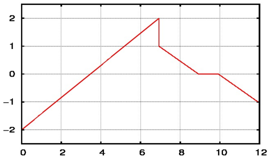
Geschwindigkeit $x_2(t)$



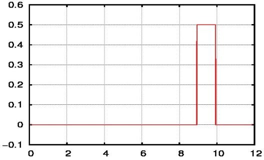
Steuerung $u(t)$



Adjungierte $\lambda_1(t)$



Adjungierte $\lambda_2(t)$



Multiplikator $\mu_2(t)$

Optimale Endzeit $T = 11.92321$, Schaltpunkt $t_1 = 6.329019$. Ein Randstück $[t_2, t_3]$ mit $x_2(t) \equiv -2$, $t_2 = 8.928204$, $t_3 = 9.931532$.

> Übersicht

1.) Einführende Beispiele

2.) Gewöhnliche optimale Steuerprozesse

3.) Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen

4.) Optimale Multiprozesse mit Zustandsbeschränkungen

5.) Komplexeres Anwendungsmodell: Der Voice Coil–Motor

> Optimaler Steuerprozess in Standardform

$$
\textbf{(P)} \qquad
\begin{array}{rl}
\text{Minimiere} & F(x,u) = g(x(0), x(T)) + \int_0^T f_0(x,u)dt \\
\text{unter} & \dot{x} = f(x,u), \quad 0 \le t \le T, \\
 & \varphi(x(0), x(T)) = 0, \\
 & u(t) \in U, \quad 0 \le t \le T.
\end{array}
$$

Sei T fest und $(x^*, u^*) \in \mathbb{W}^{1,\infty}([0,T], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$ zulässig. Die Steuerung u^* heißt lokal optimal, falls $F(x^*,\ u^*) \le F(x,u)$ für alle zulässigen (x,u) mit $||u - u^*||_1 + |x(0) - x^*(0)| < \varepsilon$.

> Notwendige Optimalitätsbedingungen (1)

Hamilton–Funktion:

$$H(x,\, \lambda,\, u) = \lambda_0 f_0(x,\, u) + \lambda f(x,\, u), \quad \lambda_0 \in \mathbb{R},\, \lambda \in \mathbb{R}^n$$

Das Minimumprinzip von Pontryagin (1/2)

Sei $(x^*,\, u^*)$ lokal optimale Lösung von (P).
Dann gibt es $\lambda_0 \geq 0$, eine stetige und stückweise stetig differenzierbare *adjungierte Funktion* $\lambda : [0,\, T] \to \mathbb{R}^n$ und einen Multiplikator $\rho \in \mathbb{R}^r$, so dass folgende Aussagen gelten:

(i) $(\lambda_0, \lambda(t), \rho) \neq 0$ für $t \in [0,\, T]$,

(ii) $H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{u \in U} H(x^*(t), \lambda(t), u)$, $t \in [0,\, T]$,

> Notwendige Optimalitätsbedingungen (2)

Das Minimumprinzip von Pontryagin (2/2)

(iii) $\dot{\lambda}(t) = -H_x(x^*(t), \lambda(t), u^*(t))$ für $t \in [0, T]$,

(iv) $\lambda(0) = -\frac{\partial}{\partial x_\mathrm{a}}(\lambda_0 g + \rho\varphi)(x^*(0), x^*(T))$,
$\lambda(T) = \frac{\partial}{\partial x_\mathrm{e}}(\lambda_0 g + \rho\varphi)(x^*(0), x^*(T))$,

(v) Für autonome Probleme mit $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ gilt

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \text{const.}, \ \ t \in [0, T]\,,$$

(vi) Für Probleme mit freier Endzeit gilt

$$H(x^*(T^*), \lambda(T^*), u^*(T^*)) = 0.$$

> Hinreichende Optimalitätsbedingungen

Minimierte Hamilton–Funktion:

$$H^0(x, \lambda) := \min_{u \in U} H(x, \lambda, u).$$

Hinreichende Optimalitätsbedingungen

(x^*, u^*) erfülle das Minimumprinzip von Pontryagin mit $\lambda_0 = 1$, $\lambda : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ und $\rho \in \mathbb{R}^r$. Zusätzlich seien

(i) φ affin–linear,

(ii) g konvex,

(iii) $H^0(x, \lambda(t))$ konvex in $x \in \mathbb{R}^n$ für alle $t \in [0, T]$.

Dann ist (x^*, u^*) eine optimale Lösung von (P).

> Prozesse mit **linear auftretender Steuerung**

$f_0(x,u) = a_0(x) + b_0(x)u, \quad f(x,u) = a(x) + b(x)u,$

Schaltfunktion: $\sigma(t) := H_u[t] = b_0(x(t)) + \lambda(t)b(x(t)).$

Aus dem Minimumprinzip folgt $\sigma(t)u^*(t) = \min_{u\in U} \ \sigma(t)u.$

Für $U = [u_{\min}, u_{\max}]$, gilt die Steuervorschrift

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\min}, & \text{falls } \sigma(t) > 0, \\ u_{\max}, & \text{falls } \sigma(t) < 0, \\ \text{unbestimmt}, & \text{falls } \sigma(t) = 0. \end{cases}$$

u heißt bang–bang im Intervall $[t_1, t_2]$, falls σ nur isolierte Nullstellen in $[t_1, t_2]$ besitzt. u heißt singulär im Intervall $[t_1, t_2]$, falls $\sigma(t) = 0$ für alle $t \in [t_1, t_2]$ gilt.

> Prozesse mit **regulärer Hamilton–Funktion**

Reguläre Hamilton–Funktion

Eine Hamilton–Funktion $H(x, \lambda, u)$ heißt regulär bezüglich einer Trajektorie (x, λ), wenn $u^*(x, \lambda) := \arg\min_{u \in U} H(x, \lambda, u)$ lokal eindeutig bestimmt ist.

(Strenge) Legendre–Clebsch–Bedingung:

$$H_u(x(t), \lambda(t), u(t)) = 0, \quad H_{uu}(x(t), \lambda(t), u(t)) > 0.$$

$\Longrightarrow$ Lokale Auflösung von $H_u[t] = 0$ nach $u^*(x, \lambda)$ möglich.

Idee: Eliminiere u und löse das Randwertproblem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^*(x, \lambda)), \\ \dot{\lambda} &= -H_x(x, \lambda, u^*(x, \lambda)), \end{aligned}$$

> Übersicht

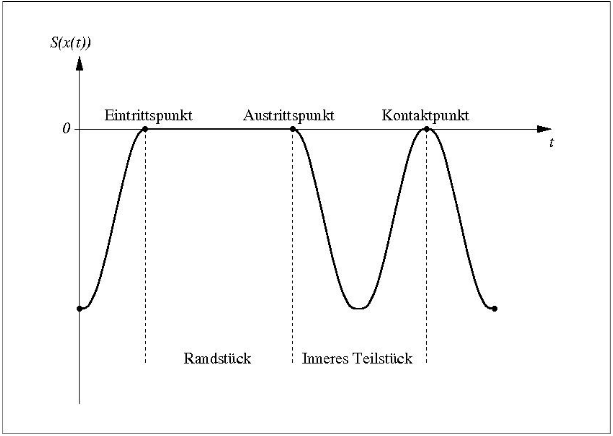
> Erweiterung um Zustandsbeschränkungen

(ZP)

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & F(x,u) = g(x(0),x(T)) + \int_0^T f_0(x,u)dt \\
\text{unter} \quad & \dot{x} = f(x,u), \quad 0 \le t \le T, \\
& \varphi(x(0),x(T)) = 0, \\
& u(t) \in U, \quad 0 \le t \le T, \\
& S(x(t)) \le 0, \quad 0 \le t \le T.
\end{aligned}
$$

Typische Zustandsbeschränkung: $x_{\min} \le x(t) \le x_{\max}$.

> Trajektorie mit Zustandsbeschränkung $S(x(t)) \leq 0$



Erweitertes Minimumprinzip für Zustandsbeschränkungen

Sei (x^*, u^*) eine optimale Lösung von (ZP). Die Regularitätsbedingung sei erfüllt und für jedes Randstück gelte $u^*(t) \in \operatorname{int}(U)$. Dann existieren $\lambda_0 \geq 0$, $\rho \in \mathbb{R}^s$, eine stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $\lambda : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, eine stückweise stetige Multiplikatorfunktion $\mu : [0, T] \to \mathbb{R}^k$ und Multiplikatoren $\gamma_{\mathrm{a}}, \gamma_{\mathrm{e}} \in \mathbb{R}^k$, so dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{u \in U} H(x^*(t), \lambda(t), u),\ t \in [0,\ T]$,

(ii) $\dot{\lambda} = -H_x[t] - \mu(t) S_x(x^*(t))$,

(iii) $\lambda(0) = -\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{a}}} (\lambda_0\, g + \rho\, \varphi)(x^*(0), x^*(T)) - \gamma_{\mathrm{a}}\, S_x(x^*(0))$,
$\lambda(T) = \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{e}}} (\lambda_0\, g + \rho\, \varphi)(x^*(0), x^*(T)) + \gamma_{\mathrm{e}} S_x(x^*(T))$,

(iv) $\mu(t) \geq 0$ und $\mu(t) S(x^*(t)) = 0$ für alle $t \in [0, T]$.

> Übersicht

> Optimale Multiprozesse: Motivation

- Problem bei einigen Anwendungen: Systemverhalten (Dynamik) wechselt zu unbekannten Zeitpunkten $t_j \in [0, T]$ (z.B. durch Reibungseffekte oder Impulserhaltung).
- Betrachte Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$ mit
$$\dot{x} = f^{(j)}(x, u), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \ldots, N.$$
- Es sind außerdem abschnittsweise unterschiedliche Zielfunktionale $F^{(j)}$ und Zustandsbeschränkungen $S^{(j)}$ zugelassen.
- Der Zustand x kann unstetig sein in den Schaltpunkten t_j.

> Optimaler Multiprozess (MP)

Minimiere $F(x,u) := \sum_{j=1}^{N} F^{(j)}(x,u) = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f_0^{(j)}(x,u)dt,$

unter $\dot{x} = f^{(j)}(x,u)$ für f.a. $t \in [t_{j-1},\ t_j],\ j = 1,\dots,N,$

$\varphi^{(0)}(x(0)) = 0, \quad \varphi^{(N)}(x(T)) = 0,$

$\varphi^{(j)}(x(t_j^+), x(t_j^-)) = 0,\ j = 1,\dots,N-1,$

$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ für $t \in [0,\ T],$

$S^{(j)}(x(t)) \le 0$ für $t \in [t_{j-1},\ t_j],\ j = 1,\dots,N.$

> Transformation auf gewöhnlichen Steuerprozess

- Zeittransformationen: $[t_{j-1},\, t_j] \rightsquigarrow [0,\, 1], \quad j = 1, \dots, N.$
- Aufstockung des Zustands und der Steuerung:

$$
\begin{aligned}
\xi^{(j)} &:= t_j - t_{j-1}, \\
x^{(j)}(s) &:= x(t_{j-1} + s\xi^{(j)}), \quad s \in [0,\, 1], \\
u^{(j)}(s) &:= u(t_{j-1} + s\xi^{(j)}), \quad s \in [0,\, 1], \\
y(s) &:= \begin{pmatrix} x^{(1)}(s) \\ \xi^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(N)}(s) \\ \xi^{(N)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad v(s) := \begin{pmatrix} u^{(1)}(s) \\ \vdots \\ u^{(N)}(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_v}.
\end{aligned}
$$

> Minimumprinzip für Multiprozesse mit ZB

- Es gelten unabhängige Minimumbedingungen für jedes Teilintervall $[t_{j-1}, t_j]$ (Hamilton–Funktionen $H^{(j)}$ müssen abschnittsweise definiert werden).
- Die adjungierte Differentialgleichung gilt stückweise.
- In den Übergängen t_j der Teilprozesse gelten zusätzliche Sprungbedingungen für λ:

$$\begin{aligned}\lambda(t_j^+) &= \lambda(t_j^-) - \rho^{(j)} \left(\varphi^{(j)}_{x_\mathrm{a}}(x(t_j^+), x(t_j^-)) + \varphi^{(j)}_{x_\mathrm{e}}(x(t_j^+), x(t_j^-)) \right) \\ &\quad -\gamma_\mathrm{a}^{(j+1)}\, S_x^{(j+1)}(x(t_j^+)) - \gamma_\mathrm{e}^{(j)}\, S_x^{(j)}(x(t_j^-)),\end{aligned}$$

- Die Transversalitätsbedingungen und die Sprungbedingungen für λ bzgl. Randstücken gelten in ähnlicher Form wie im erweiterten Minimumprinzip.

Erinnerung: Roboterarm als Multiprozess

Minimiere die Endzeit T

unter
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad \text{für } 0 \le t \le T,$$
$$\dot{x}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{m_1+m_2}\, u(t) & \text{für } 0 \le t < t_1, \\ \frac{1}{m_1}\, u(t) & \text{für } t_1 \le t \le T, \end{cases}$$
$$x_1(0) = x_1(T) = a, \quad x_2(0) = x_2(T) = 0,$$
$$x_1(t_1^-) = x_1(t_1^+) = b, \quad x_2(t_1^+) = \frac{m_1+m_2}{m_1} x_2(t_1^-),$$
$$|\, u(t)\,| \le u_{\max}, \quad \text{für } t \in [0,\ T],$$
$$-c \le x_2(t) \le c, \quad \text{für } t \in [0,\ T].$$

> Notwendige Optimalitätsbedingungen (1)

Hamilton–Funktion:

$$\begin{aligned} H^{(1)}(x,\lambda,\mu,u) &= 1+\lambda_1 x_2 + \frac{1}{2}\,\lambda_2 u + \mu_1(x_2-2)+\mu_2(-x_2-2), \\ H^{(2)}(x,\lambda,\mu,u) &= 1+\lambda_1 x_2 + \phantom{\frac{1}{2}}\,\lambda_2 u + \mu_1(x_2-2)+\mu_2(-x_2-2). \end{aligned}$$

Adjungierte Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \dot\lambda_1 &= -H^{(j)}_{x_1}[t] = 0, \\ \dot\lambda_2 &= -H^{(j)}_{x_2}[t] = -\lambda_1-\mu_1+\mu_2, \end{aligned}\right. \quad \text{für } t\in[t_{j-1},\ t_j],\ j=1,2.$$

Schaltfunktion:

$$\sigma(t) = \begin{cases} H_u^{(1)}[t] = \frac{1}{2}\,\lambda_2(t) & \text{für } 0<t<t_1, \\ H_u^{(2)}[t] = \phantom{\frac{1}{2}}\,\lambda_2(t) & \text{für } t_1<t<T. \end{cases}$$

> Notwendige Optimalitätsbedingungen (2)

Auf einem Randstück $[t_{\mathrm{ein}},\, t_{\mathrm{aus}}]$ mit $S_1(x(t)) := x_2(t) - c = 0$ oder $S_2(x(t)) := -x_2(t) - c = 0$ gilt $\dot{x}_2 = 0$. Man erhält die

Randsteuerung $\quad u_{\mathrm{rand}}(t) = 0.$

Es ist also $u_{\mathrm{rand}}(t) \in \mathrm{int}(U)$ und somit $\sigma(t) = \lambda_2(t) = 0$.

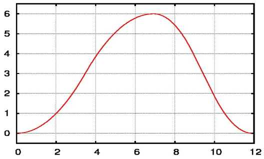
$\Longrightarrow$ Steuervorschrift:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } \lambda_2(t) < 0, \\ 0, & \text{für } \lambda_2(t) = 0, \\ -1, & \text{für } \lambda_2(t) > 0. \end{cases}$$

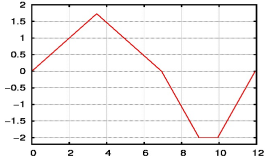
Für die Multiplikatoren μ_1 und μ_2 ergibt sich aus $\dot{\lambda}_2(t) = 0$

$$\mu_1(t) = -\lambda_1(t) \text{ und } \mu_2(t) = \lambda_1(t) \text{ für } t \in [t_{\mathrm{ein}},\, t_{\mathrm{aus}}].$$

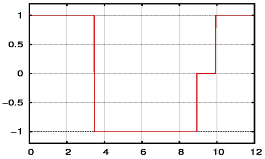
$> a = 0,\ b = 6,\ m_1 = m_2 = 1,\ u_{\max} = 1,\ |\,x_2(t)\,| \le 2$



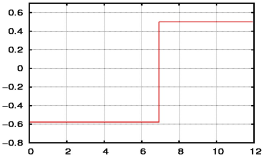
Position $x_1(t)$



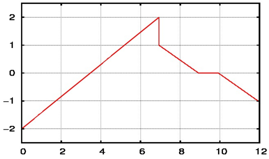
Geschwindigkeit $x_2(t)$



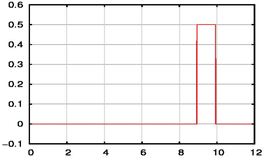
Steuerung $u(t)$



Adjungierte $\lambda_1(t)$



Adjungierte $\lambda_2(t)$

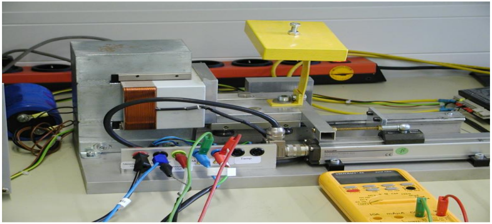


Multiplikator $\mu_2(t)$

Optimale Endzeit $T = 11.92321$, Schaltpunkt $t_1 = 6.329019$. Ein Randstück $[t_2,\ t_3]$ mit $x_2(t) \equiv -2,\ t_2 = 8.928204,\ t_3 = 9.931532$.

> Übersicht

> Anwendungsmodell: Der Voice Coil–Motor



Zustandsvariablen:

$x_1(t)$: Position des Motors

$v_1(t)$: Geschwindigkeit des Motors

$x_2(t)$: Position der Last

$v_2(t)$: Geschwindigkeit der Last

$I(t)$: Stromstärke

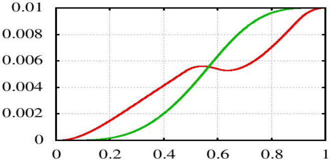
Steuerung: $u(t) = U(t)$: **Spannung**

> Zeitoptimale Steuerung des Voice Coil–Motors

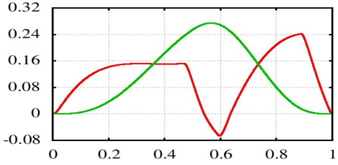
Min. $F(x,u) = T$

unter
$$\dot{x}_1(t) = v_1(t)\,,$$
$$\dot{v}_1(t) = \frac{1}{m_1}\left[\, K_F \cdot I(t) - k \cdot (x_1(t) - x_2(t)) - F_R \cdot sign(v_1(t)) \,\right],$$
$$\dot{x}_2(t) = v_2(t)\,,$$
$$\dot{v}_2(t) = \frac{k}{m_2} \cdot (x_1(t) - x_2(t))\,,$$
$$\dot{I}(t) = \frac{1}{L}\left[\, u(t) - R \cdot I(t) - K_s \cdot v_1(t) \,\right].$$
$$x(0) = x_0 = (0,0,0,0,0), \quad x(T) = x_T = (0.01, 0, 0.01, 0, 0),$$
$$|u(t)| \le u_{\max}, \quad |v_1(t) - v_2(t)| \le c_v$$

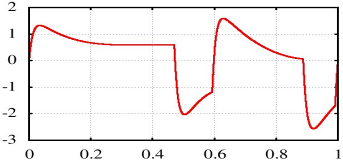
> Zeitoptimale Steuerung, $u_{\max} = 3$



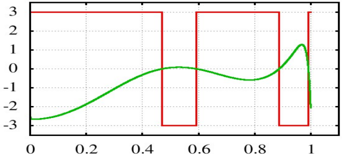
Positionen $x_1(t)$, $x_2(t)$



Geschwindigkeiten $v_1(t)$, $v_2(t)$



Stromstärke $I(t)$

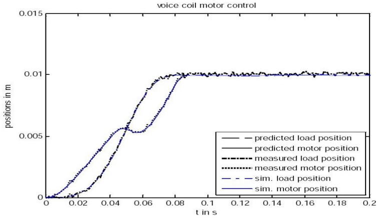


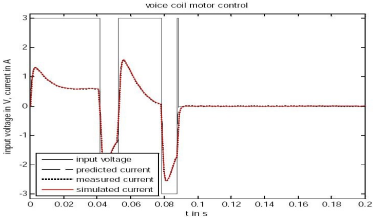
Optimale Steuerung $u(t)$ und Schaltfunktion $\sigma(t)$

Optimale Endzeit $T = 0.088494$.

> Validierung unter realen Bedingungen im Testlabor

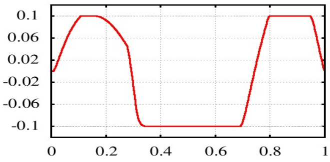
- Anwendung der optimalen Lösung im Testlabor (Prof. O. Zirn, FH Giessen– Friedberg & TU Clausthal)
- Verwendung von 1000 Werten (DSPACE Sampling–Rate $T_s = 0.1\,\mathrm{ms}$, Prozessdauer $T \approx 0.1\,\mathrm{s}$).



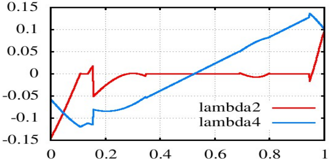


$u_{\max} = 3$: Vergleich der vorgegebenen (durchgezogene Linie), simulierten (gepunktete Linie) und experimentell ermittelten Lösung (Strichpunktlinie).

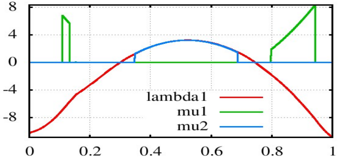
> Ergebnisse für $u_{\max} = 3,\ |v_1(t) - v_2(t)| \leq 0.1$



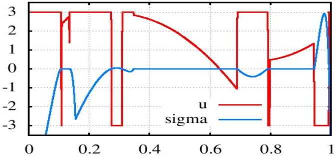
Differenz $v_1(t) - v_2(t)$



Adjungierte Variablen $\lambda_2(t),\ \lambda_4(t)$



Multiplikatoren $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ und adjungierte Variable $\lambda_1(t)$



Optimale Steuerung $u(t)$ und skalierte Schaltfunktion $\sigma(t)$

Optimale Steuerung hat 9 bang–bang Intervalle und 3 Randstücke mit $|v_1(t) - v_2(t)| = c_v$. Endzeit $T = 0.098725$.

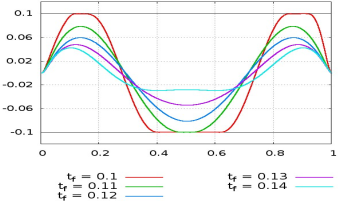
> Energieminimale Steuerung

$$\text{Minimiere} \quad \int_0^T u(t)^2\,dt \quad \text{für feste Endzeit } T > 0.$$

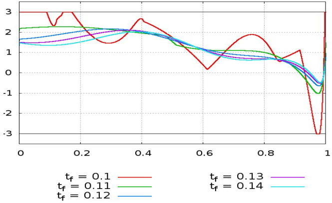
Minimumprinzip: Die optimale Steuerung

$$u(t) = \text{Proj.}_{[-u_{\max}, u_{\max}]} \quad (-\lambda_5(t)\,/\,2L)$$

ist stetig (Strikte Legendre–Bedingung).



Differenz $v_1(t) - v_2(t)$



Optimale Steuerung $u(t)$

Vielen Dank
für Eure Aufmerksamkeit!

Bahne Christiansen
christiansen@wwu.de