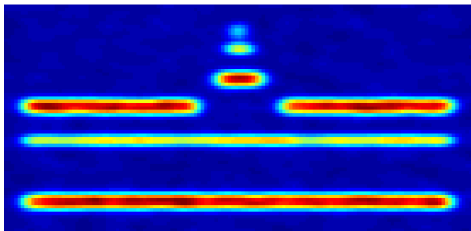


# Inverse Probleme in Medizinischer Bildgebung und Bioelektromagnetismus

Felix Lucka

Seminar zu Differenzialgleichungen in der Biomedizin  
Universität Münster  
01.07.2009



## 1 Einleitung: Medizinische Bildgebung

- Imaging Modalitäten
- Inverse Probleme

## 2 Das inverse Problem des Bioelektromagnetismus

- Einleitung
- Direktes Problem
- Quellmodelle
- Volumenleitermodelle
- Inverses Problem

## 3 Regularisierung

Die bisherigen Themen behandelten größtenteils die **direkte** Modellierung biologischer Prozesse, um darauf basierend Vorhersagen über das Verhalten der betrachteten Systeme zu entwickeln.

Medizinisch relevant ist diese Art der Modellierung in erster Linie in der Grundlagenforschung und Arzneimittelentwicklung u. a., um beispielsweise Aussagen über die Wirksamkeit verschiedener Therapiemöglichkeiten zu treffen.

Die bisherigen Themen behandelten größtenteils die **direkte** Modellierung biologischer Prozesse, um darauf basierend Vorhersagen über das Verhalten der betrachteten Systeme zu entwickeln.

Medizinisch relevant ist diese Art der Modellierung in erster Linie in der Grundlagenforschung und Arzneimittelentwicklung u. a., um beispielsweise Aussagen über die Wirksamkeit verschiedener Therapiemöglichkeiten zu treffen.

In der klinischen Anwendung taucht oft die Problemstellung auf, Wege zu finden, den Zustand eines Patienten möglichst schonend (d.h. minimal invasiv) zu bestimmen. Techniken, die aus Messdaten geeigneter Apparate "Bilder", d.h. Medien in denen Informationen morphologisch motiviert aufbereitet sind, erzeugen, nennt man "**Bildgebende Verfahren**".

Die **Einteilung** Bildgebender Verfahren kann dabei auf verschiedene Arten geschehen:

- Nach Art der Abbildungsmodalität
- Nach Art der erhaltenen Informationen
- Nach Grad der Invasivität

Diese Klassifizierung ist jedoch zu grob und eher ein Anhangspunkt.

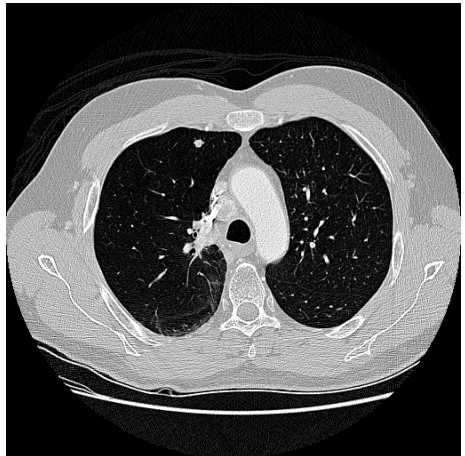
Auf den nächsten slides folgen ein paar Beispiele Bildgebender Verfahren.

# X-Ray Imaging: Projectional Radiography, Computed tomography (CT)

- Abbildungsmodalität: Intensitätsdämpfung bei **Transmission** von Röntgenstrahlung
- Informationsart: **anatomisch**
- Invasivität: Strahlenexposition erfordert medizinische Indikation, speziell CT



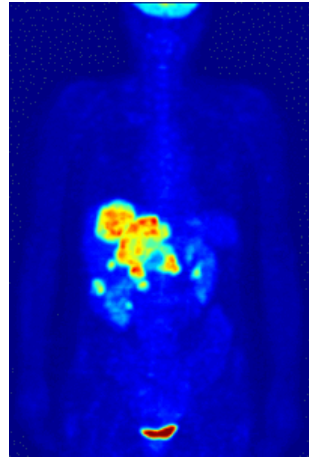
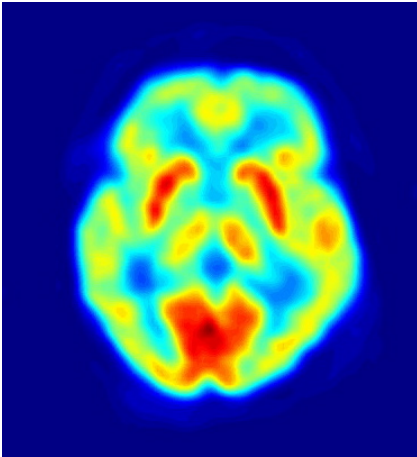
Quelle: Wikimedia Commons



Quelle: [www.chestjournal.org](http://www.chestjournal.org)

# Nuclear Imaging: PET, SPECT, Planar Scintigraphy

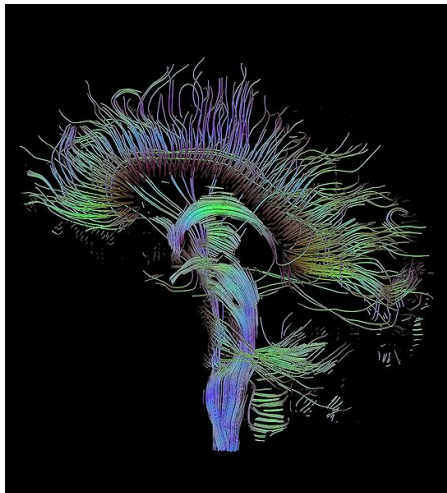
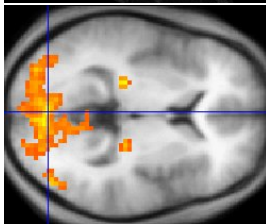
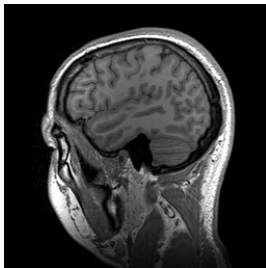
- Abbildungsmodalität: **Emission** von Gammastrahlung bei radioaktivem Zerfall von Tracern
- Informationsart: **funktionell** (speziell: metabolisch oder perfusiv)
- Invasivität: Strahlenexposition erfordert medizinische Indikation



Quelle: Wikimedia Commons

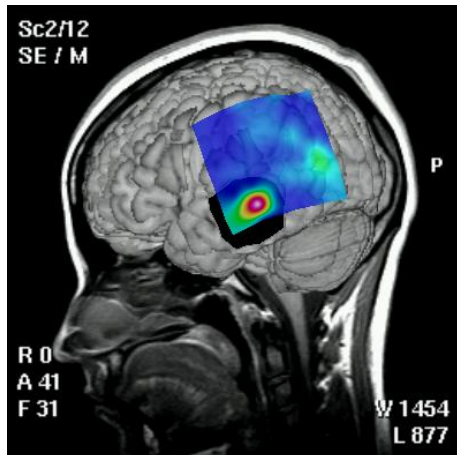
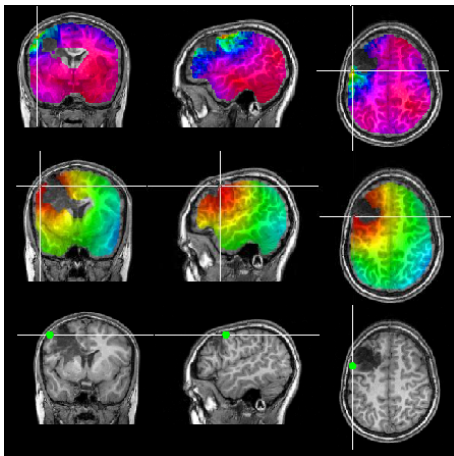
# Magnetic Resonance Imaging: MRI, fMRI, DTI,...

- Abbildungsmodalität: Unterschiedliche **Kernspin-Resonanz** auf externe Magnetfelder
- Informationsart: **anatomische** sowie **funktionell** (speziell: Perfusion, Hämodynamik, Diffusion, Konnektivität)
- Invasivität: keine allgemein auftretende Belastung



# Bioelectromagnetic Mapping: ECG/MCG, EEG/MEG

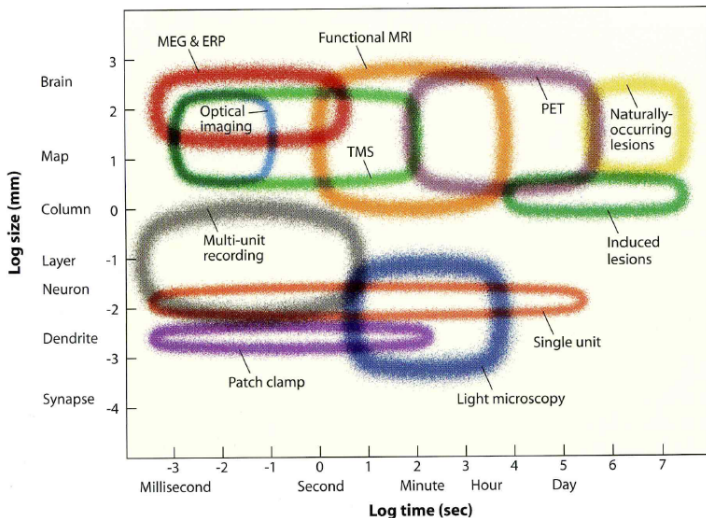
- Abbildungsmodalität: **Elektromagnetische Felder**, induziert von kollektiven Ionenströmen
- Informationsart: **funktionell** (speziell: Neuronale Aktivität, Aktionspotenzialfronten)
- Invasivität: keine



Quelle: IBB, Uniklinikum Münster



Eine weitere wichtige Eigenschaft verschiedener Bildgebender Verfahren ist ihre **räumliche und zeitliche Auflösung**.



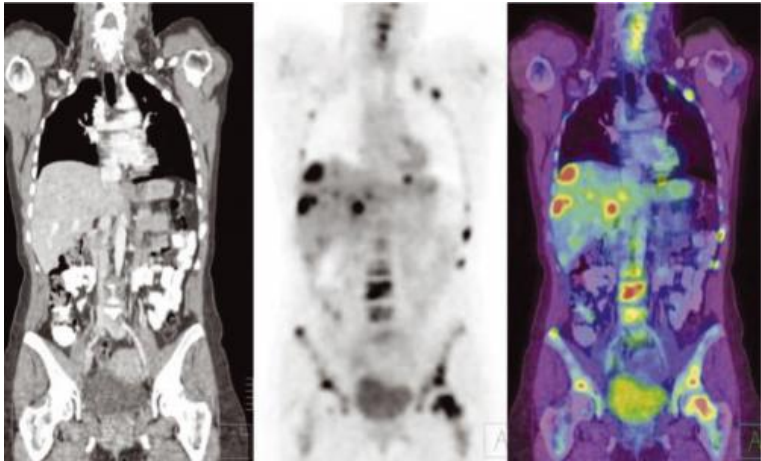
**Abbildung:** Raumzeitliche Auflösung verschiedener brain-imaging Verfahren

Quelle: Gazzaniga, Ivry & Mangun, Cognitive Neuroscience, 2nd ed., W.W.Norton & Company, 2002

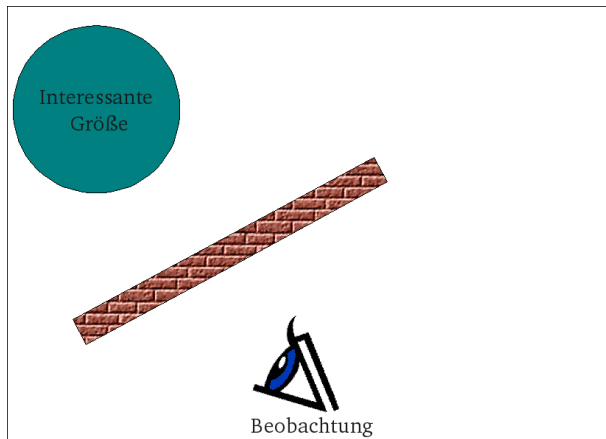
Um die Nachteile einzelner Verfahren zu auszugleichen, und verschiedene Informationsarten zu kombinieren, ist ein Trend in der Forschung die Entwicklung **kombinierter** Verfahren:

**Apparativ:** Verfahren, dessen Messvorgänge dies zulassen, werden vom gleichen Apparat simultan ausgeführt, die Bilder werden direkt aufeinander registriert. Bsp.: PET/CT, PET/MRI

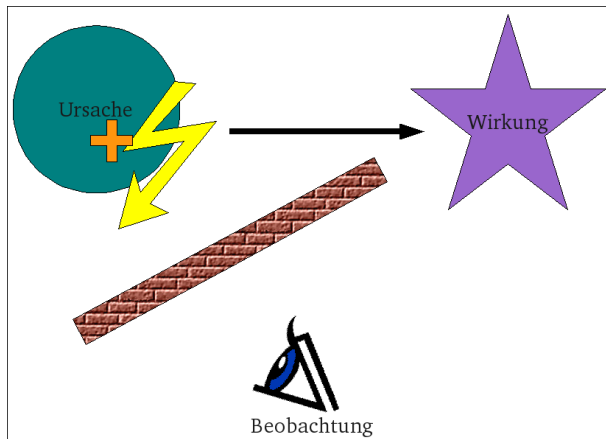
**Postapparativ:** Die Daten werden mit verschiedenen Apparaten aufgenommen, und müssen aufwendig aufeinander registriert werden (sog. *Soft-Fusion*).



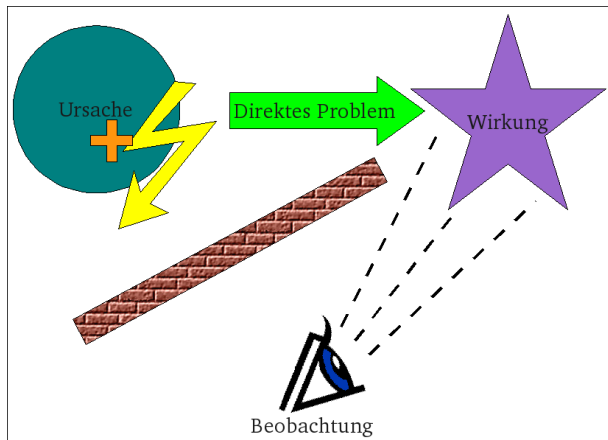
Bei allen Bildgebenden Verfahren versucht man, eine interessierende, aber nicht direkt zugängliche Größe durch **indirekte Beobachtungen** zu **rekonstruieren**. Physikalisch gesehen, handelt es sich hierbei um ein sog. **inverses Problem**.



Bei allen Bildgebenden Verfahren versucht man, eine interessierende, aber nicht direkt zugängliche Größe durch **indirekte Beobachtungen** zu **rekonstruieren**. Physikalisch gesehen, handelt es sich hierbei um ein sog. **inverses Problem**.

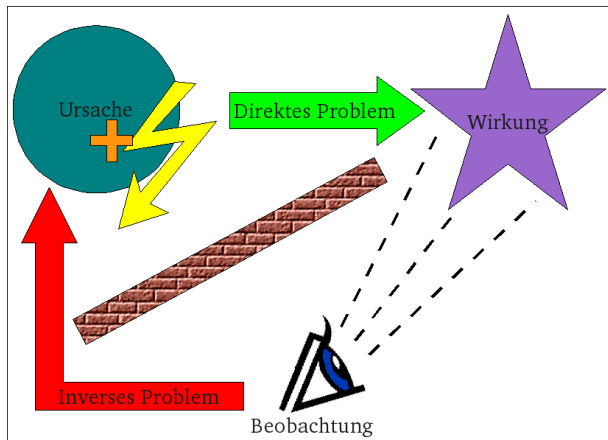


Bei allen Bildgebenden Verfahren versucht man, eine interessierende, aber nicht direkt zugängliche Größe durch **indirekte Beobachtungen** zu **rekonstruieren**. Physikalisch gesehen, handelt es sich hierbei um ein sog. **inverses Problem**.



**Direktes Problem:** Berechne aus einer gegebenen **Ursache** die zu beobachtende **Wirkung**.

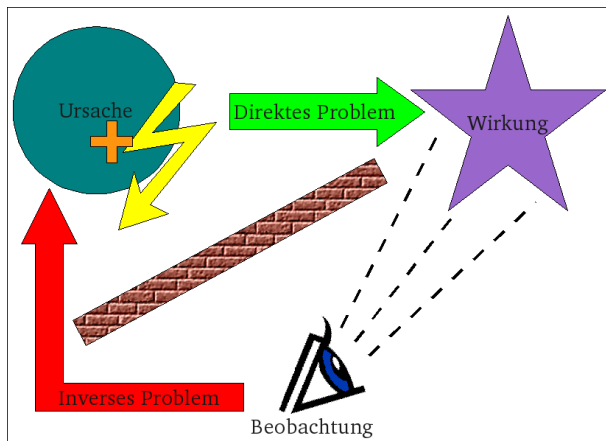
Bei allen Bildgebenden Verfahren versucht man, eine interessierende, aber nicht direkt zugängliche Größe durch **indirekte Beobachtungen** zu **rekonstruieren**. Physikalisch gesehen, handelt es sich hierbei um ein sog. **inverses Problem**.



**Direktes Problem:** Berechne aus einer gegebenen **Ursache** die zu beobachtende **Wirkung**.

**Inverses Problem:** Rekonstruiere die zu einer beobachteten **Wirkung** gehörende **Ursache**.

Bei allen Bildgebenden Verfahren versucht man, eine interessierende, aber nicht direkt zugängliche Größe durch **indirekte Beobachtungen** zu **rekonstruieren**. Physikalisch gesehen, handelt es sich hierbei um ein sog. **inverses Problem**.



**Direktes Problem:** Berechne aus einer gegebenen **Ursache** die zu beobachtende **Wirkung**.

**Inverses Problem:** Rekonstruiere die zu einer beobachteten **Wirkung** gehörende **Ursache**.

Die Lösung des inversen Problems erfordert das Modellieren und Lösen des direkten Problems!

Die **Funktionalanalysis** bietet den Rahmen, den wir wählen werden, um Inverse Probleme mathematisch zu beschreiben.

Funktionalanalysis untersucht die Eigenschaften von Vektorräumen und Abbildungen (sog. **Operatoren**) zwischen diesen mit Hilfe von Konzepten aus der **Topologie** und der **Algebra**. Insbesondere in der Lösungstheorie partieller Differenzialgleichungen spielt sie eine wichtige Rolle.



Die **Funktionalanalysis** bietet den Rahmen, den wir wählen werden, um Inverse Probleme mathematisch zu beschreiben.

Funktionalanalysis untersucht die Eigenschaften von Vektorräumen und Abbildungen (sog. **Operatoren**) zwischen diesen mit Hilfe von Konzepten aus der **Topologie** und der **Algebra**. Insbesondere in der Lösungstheorie partieller Differenzialgleichungen spielt sie eine wichtige Rolle.

Die wesentlichen Zutaten für die Modellierung sind:

- Raum der möglichen Ursachen  $X$ , der zugehörigen Wirkungen  $Y$ , und der möglichen Messungen  $Z$ .  
Die Gestalt der Räume ist durch die zugrunde liegenden physikalischen Annahmen gegeben. Oft sind z.B. die Quadrate der betrachteten Größen physikalisch zu einer Energie proportional, daher wird gefordert, dass sie in  $L^2$  liegen.
- Ein **Vorwärtsoperator**  $F : X \rightarrow Y$  der jeder Ursache eine Wirkung zuordnet.  $F$  ist durch die zugrunde liegenden physikalischen Gesetze gegeben und ist meist **Lösungsoperator einer PDGL**.
- Ein **Messoperator**  $T : Y \rightarrow Z$  der jeder Wirkung ein Messergebnis zuordnet. Das beinhaltet die Spezifikation eines **Rauschmodells** und die Modellierung der Abbildungsmodalität. Der Messoperator ist im Prinzip eine **Zufallsvariable**, und es gibt verschiedene Wege mit diesem Problem umzugehen.
- Ein **inverses Verfahren** ist nun eine Abbildung  $G : Z \rightarrow X$  die  $T \circ F$  in einem verallgemeinerten Sinne invertiert.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{F} & Y & \xrightarrow{T} & Z \\ & \xleftarrow{G} & & & \end{array}$$

## 1 Einleitung: Medizinische Bildgebung

- Imaging Modalitäten
- Inverse Probleme

## 2 Das inverse Problem des Bioelektromagnetismus

- Einleitung
- Direktes Problem
- Quellmodelle
- Volumenleitermodelle
- Inverses Problem

## 3 Regularisierung

# Bioelektromagnetismus

Viele Arten körperlicher Aktivität, z.B. Nerv- und Reizleitungsprozesse sind mit dem **kollektiven** Fließen **mikroskopischer Ionenströme** in den beteiligten Zellen verbunden.

Die Messung dieser Ströme und ihr Verlauf liefert wichtige Informationen über die zugrunde liegenden Prozesse.

Je nach Stärke und Auflösungsbedarf gibt es verschiedene Möglichkeiten dies zu tun:

**Invasiv** Die Ströme werden direkt gemessen, z.B. Patch-Clamp, Multielectrode arrays, ECoG, Tiefenelektroden

**Nichtinvasiv** Die Ströme verursachen elektromagnetische Felder im Gewebe und an der Körperoberfläche (sog. **Bioelektromagnetismus**). Das inverse Problem, aus der Messung der Felder an der Körperoberfläche die Stromverteilung im Körper zu rekonstruieren, nennt man "**Inverses Problem des Bioelektromagnetismus**".

Im Folgenden geht es um die mathematische Beschreibung dieses Problems.

Das Entstehen von elektrischen und magnetischen Feldern aufgrund von freien Ladungen oder Strömen wird durch die sog. Maxwellgleichungen beschrieben:

### Maxwellgleichungen

Sei  $\vec{j}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine **Stromdichte** und  $\rho(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Ladungsdichte**.

$\sigma(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine **Leitfähigkeit** (isotroph).

Das **elektrische Feld**  $\mathbf{E}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das **magnetische Feld**  $\mathbf{B}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sind dann durch folgende PDGL gegeben:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho / \sigma$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \cdot (\vec{j} - \sigma \partial_t \mathbf{E})$$

### Zur Interpretation:

Ein Vektorfeld  $\mathbf{A}$  ist unter bestimmten Umständen vollständig durch sein **Quellfeld**  $\operatorname{div}(\mathbf{A})$  und sein **Wirbelfeld**  $\operatorname{rot}(\mathbf{A})$  bestimmt.

Die Maxwellgleichungen machen eine Aussage darüber, wodurch diese Anteile bei  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  verursacht werden.

Das Entstehen von elektrischen und magnetischen Feldern aufgrund von freien Ladungen oder Strömen wird durch die sog. Maxwellgleichungen beschrieben:

### Maxwellgleichungen

Sei  $\vec{j}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine **Stromdichte** und  $\rho(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Ladungsdichte**.

$\sigma(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine **Leitfähigkeit** (isotrop).

Das **elektrische Feld**  $\mathbf{E}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das **magnetische Feld**  $\mathbf{B}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sind dann durch folgende PDGL gegeben:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho / \sigma$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \cdot (\vec{j} - \sigma \partial_t \mathbf{E})$$

### Zur Interpretation:

Die Gleichung  $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho / \sigma$  ist eine differenzielle Formulierung des **Coulombschen Gesetzes**, das die Kraft zwischen zwei freien Ladungen beschreibt.

Frei formuliert bedeutet die Gleichung:

*“Die Quellen des elektrischen Flusses ( $D = \sigma \mathbf{E}$ ) sind die freien (elektrischen) Ladungsträger.”*

Das Entstehen von elektrischen und magnetischen Feldern aufgrund von freien Ladungen oder Strömen wird durch die sog. Maxwellgleichungen beschrieben:

### Maxwellgleichungen

Sei  $\vec{j}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine **Stromdichte** und  $\rho(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Ladungsdichte**.

$\sigma(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine **Leitfähigkeit** (isotroph).

Das **elektrische Feld**  $\mathbf{E}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das **magnetische Feld**  $\mathbf{B}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sind dann durch folgende PDGL gegeben:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho / \sigma$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \cdot (\vec{j} - \sigma \partial_t \mathbf{E})$$

### Zur Interpretation:

Die Gleichung  $\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$  ist eine differenzielle Formulierung des **Faradaysches Induktionsgesetzes**.

Frei formuliert bedeutet die Gleichung:

*“Die zeitliche Änderung eines magnetischen Feldes induziert ein elektrisches Wirbelfeld, das seiner Ursache entgegengesetzt orientiert ist (Lenzsche Regel).”*

Das Entstehen von elektrischen und magnetischen Feldern aufgrund von freien Ladungen oder Strömen wird durch die sog. Maxwellgleichungen beschrieben:

### Maxwellgleichungen

Sei  $\vec{j}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine **Stromdichte** und  $\rho(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Ladungsdichte**.

$\sigma(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine **Leitfähigkeit** (isotroph).

Das **elektrische Feld**  $\mathbf{E}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das **magnetische Feld**  $\mathbf{B}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sind dann durch folgende PDGL gegeben:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho / \sigma$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \cdot (\vec{j} - \sigma \partial_t \mathbf{E})$$

#### Zur Interpretation:

Die Gleichung  $\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$  besagt, dass das magnetische Feld stets quellfrei ist.

Das bedeutet:

*“Es gibt keine magnetischen Ladungsträger/ Monopole” oder  
“Das magnetische Feld ist ein reines Wirbelfeld”*

Das Entstehen von elektrischen und magnetischen Feldern aufgrund von freien Ladungen oder Strömen wird durch die sog. Maxwellgleichungen beschrieben:

### Maxwellgleichungen

Sei  $\vec{j}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine **Stromdichte** und  $\rho(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Ladungsdichte**.

$\sigma(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine **Leitfähigkeit** (isotrop).

Das **elektrische Feld**  $\mathbf{E}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das **magnetische Feld**  $\mathbf{B}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sind dann durch folgende PDGL gegeben:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho / \sigma$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \cdot (\vec{j} - \sigma \partial_t \mathbf{E})$$

### Zur Interpretation:

Die Gleichung  $\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j}$  ist eine differenzielle Formulierung des **Ampèresches Flutungsgesetzes**. Frei formuliert bedeutet die Gleichung:

*“Ein stromdurchflossener Leiter ist von einem magnetischen Wirbelfeld umgeben”*  
oder

*“Die Bewegung elektrischer Ladungsträger (Strom) erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld”*

Die Ergänzung des **Maxwellschen Verschiebungstroms** ( $-\mu_0 \cdot \sigma \cdot \partial_t \mathbf{E}$ ) ist weniger anschaulich.



Die Maxwellgleichungen in der reinen Form sind zu kompliziert, um mit ihnen direkt Probleme im Bioelektromagnetismus zu modellieren, speziell, wenn man sie **numerisch lösen** möchte.

Man kann eine Reihe von **Annahmen und Approximationen** machen, um zu einer einfacheren Form zu gelangen:

- **Linearität** und **Isotropie** des Mediums wurde in den Gleichungen, so wie wir sie formuliert haben bereits angenommen.
- **Superposition**: Zusätzlich zur Linearität des Mediums interagieren Elementarquellen nicht miteinander.
- **Quasistatische Approximation**: Die zeitlichen Änderungen der Felder sind klein gegen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder, und das Gewebe ist passiv, d.h. zeitunabhängig und besitzt keine Induktivität.
- **Ladungsfreiheit**: Im Körpergewebe können sich keine makroskopischen Ladungsverteilungen aufbauen.
- **Primär- und Volumenstromdichte**: Ein einfaches Stromdichtemodell, was später erläutert wird.

Man kann dann ein **elektrisches Potenzial**  $u$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla u$  einführen, und die Lösung des Direkten Problems beschränkt sich auf die Berechnung von  $u$  aus einer PDGL.

## Direktes Problem des Bioelektromagnetismus

Sei die Leitfähigkeit  $\sigma(\vec{r})$  und die Primärstromdichte  $\vec{j}^{imp}(\vec{r})$  in einem beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebiet  $\Omega$  (hier: menschlicher Körper) mit glatter Oberfläche  $\partial\Omega$  gegeben. Das Direkte Problem besteht darin, das elektrische Potenzial  $u$  auf  $\partial\Omega$  zu berechnen, indem man :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot \vec{j}^{imp} \quad \text{in } \Omega$$

$$n \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \text{ (no-slip condition)}$$

$$\int_{\partial\Omega} u \cdot dS = 0 \quad \text{(Nullpotenzial fixieren)}$$

löst. Das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  findet man dann durch (Biot-Savart):

$$\mathbf{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \left\{ \vec{j}^{imp}(\vec{r}') - \sigma(\vec{r}') \cdot \nabla u(\vec{r}') \right\} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\vec{r}' \quad \text{für } \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

## Direktes Problem des Bioelektromagnetismus

Sei die Leitfähigkeit  $\sigma(\vec{r})$  und die Primärstromdichte  $\vec{j}^{imp}(\vec{r})$  in einem beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebiet  $\Omega$  (hier: menschlicher Körper) mit glatter Oberfläche  $\partial\Omega$  gegeben. Das Direkte Problem besteht darin, das elektrische Potenzial  $u$  auf  $\partial\Omega$  zu berechnen, indem man :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot \vec{j}^{imp} \quad \text{in } \Omega$$

$$n \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \text{ (no-slip condition)}$$

$$\int_{\partial\Omega} u \cdot dS = 0 \quad \text{(Nullpotenzial fixieren)}$$

löst. Das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  findet man dann durch (Biot-Savart):

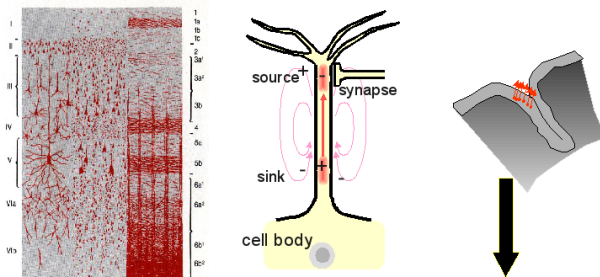
$$\mathbf{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \left\{ \vec{j}^{imp}(\vec{r}') - \sigma(\vec{r}') \cdot \nabla u(\vec{r}') \right\} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\vec{r}' \quad \text{für } \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

Um das direkte Problem praktisch zu lösen muss man sich u.a. also über drei Dinge Gedanken machen:

- Ein **Quellmodell** für  $\vec{j}^{imp}$ : Wie modelliert man die auftretenden makroskopischen Ströme?
- Ein **Volumenleitermodell**: Wie modelliert man die elektrischen Eigenschaften der verschiedenen Gewebe?
- Ein **Verfahren** um die PDGL zu lösen, moderne Verfahren sind meist FEM oder BEM Verfahren.

In der Formulierung des direkten Problems wurde bereits das Konzept der sog. Primärstromdichte benutzt. Es beruht darauf, die gesamte Stromdichte zu trennen, in den **Primärstrom**, der direkt aus der biologischen Aktivität entsteht, und den **Volumenstrom**, der durch das umliegende Gewebe fließt, und den Aufbau von Ladungsverteilungen verhindert.

Ein Ansatz zur Modellierung ist das Konzept der **Äquivalente Stromdipole**. Viele mikroskopische, gleichorientierte Stromdichten mit dominatem Dipolmoment werden durch einen makroskopischen Dipol ersetzt:

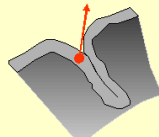


### Equivalent Current Dipole (Primary current) (~50 nAm)

parameters:

position :  $x_0$

moment :  $M$

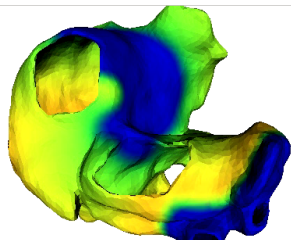


Size of Macroscopic Neural Activity

$\sim 30 \text{ mm}^2 = 5.5 \times 5.5 \text{ mm}^2$

Ein anderer Ansatz sind sog. **cable models**. Dabei werden die elektrischen Eigenschaften der Zellmembranen und ihrer Bestandteile durch **äquivalente Schaltkreise** charakterisiert, z.T. wird dann ein Grenzübergang durchgeführt, um zu einer makroskopischen Beschreibung durch PDGLs zu kommen.

Bespiele sind das **Hodgkin-Huxley Model** als Grundmodell für die Nervenleitung und das **Bidomain Model** für die Ausbreitung der Aktivierungsfronten im Herzen:

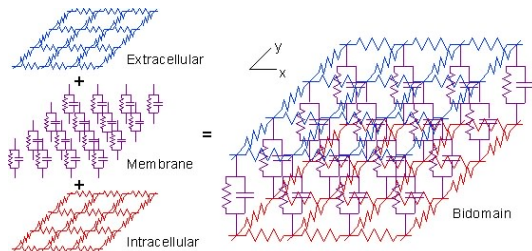


“Bidomain reentry and unsuccessful ablation”

Quelle: [www.simula.no](http://www.simula.no)

$$g_{ix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + g_{iy} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = \beta \left[ C_m \frac{\partial(u_i - u_e)}{\partial t} + G_m \cdot (u_i - u_e) \right]$$

$$g_{ex} \frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} + g_{ey} \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = -\beta \left[ C_m \frac{\partial(u_i - u_e)}{\partial t} + G_m \cdot (u_i - u_e) \right]$$



Neuere Modelle versuchen Reizleitung unter Einbeziehung mechanischer und thermischer Aspekte als **emergentes Phänomen** (genauer: Solitonen) zu beschreiben. [Heimbürg et al.]

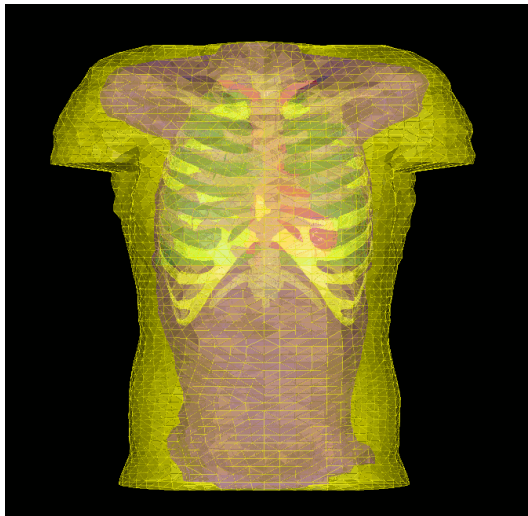
Ein **Volumenleitermodell** ist ein Volumen, das die Geometrie eines Objektes approximiert, und in dem jedem Punkt eine elektrische Leitfähigkeit zugeordnet ist.

Bereiche ähnlicher Leitfähigkeiten stellen dabei dann die verschiedenen Gewebe dar.

Man unterscheidet:

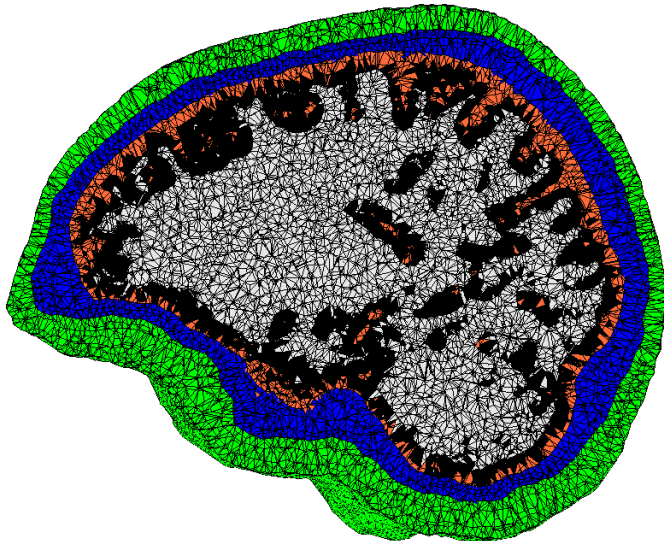
- **Vereinfachte Modelle:** Hier approximiert man die natürliche Geometrie durch einfache geometrische Gebilde, wie Kugeln oder Zylinder. Dies hat oft den Vorteil, dass sich semi-analytische Formeln für die Lösung des direkten Problems finden lassen.
- **Realistisch geformte Modelle:** Hier versucht man die exakte Geometrie anhand anatomischer Daten zu rekonstruieren und in einfache geometrische Formen zu diskretisieren. Die Stärke von FEM oder BEM Verfahren liegt darin, auf solchen Volumenleitern rechnen zu können.  
Die notwendigen anatomischen Informationen kann man aus Referenzdatensätzen entnehmen, oder individuell aus MRI oder CT Bildern **segmentieren**.  
Als Leitfähigkeiten setzt man dann Referenzwerte in die einzelnen Elemente, oder versucht diese aus Messungen individuell zu schätzen (DTI, EIT).

Für die Simulation der elektromagnetischen Felder, die von der Herzaktivität erzeugt werden (MCG/ECG, BSPM), braucht man ein Volumenleitermodell des Torsos mit den verschiedenen Organen, Knochen, Muskeln und Hautschichten.



Visualisierung: SCIRun; Daten: uthatorso; beides vom SCI Institut, University of Utha

Für die Simulation der elektromagnetischen Felder, die von Gehirnaktivität erzeugt werden (MEG/EEG), braucht man ein Volumenleitermodell des Gehirns mit den verschiedenen "compartments": Weiße Substanz, Graue Substanz, CSF, Schädel und Haut.





## Inverses Problem des Bioelektromagnetismus

Gegeben seien die Messdaten  $y$  des elektrischen Potentials  $u$  und/oder der Normalkomponente des magnetischen Feldes  $\langle n, \mathbf{B} \rangle$  in  $M$  Punkten auf der Oberfläche  $\partial\Omega$  und die Leitfähigkeit  $\sigma(\vec{r})$  in  $\Omega$  (bzw. ein Volumenleitermodell von  $\Omega$ )

[MEG/EEG]: Bestimme die Primärstromdichte  $\vec{j}^{imp}$  in  $\Omega$ .

[ECG/BSPM]: Bestimme das elektrische Potential auf der Herzoberfläche (epikardiales Potential).

*“Das Problem ist sowas von schlecht gestellt, da gibt’s doch nix zu holen!  
Da würd ich die Finger von lassen!”*

frei nach F. Wübbeling, Skiseminar 2009

Was meint er damit?

Meist sind inverse Problem **schlecht gestellt**, d.h. im Sinne von Hadamard ist eine der folgenden Bedingungen nicht gegeben:

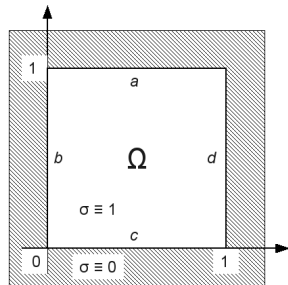
- ① **Existenz:** Das Problem hat eine Lösung.
- ② **Eindeutigkeit:** Diese Lösung ist eindeutig bestimmt.
- ③ **Stabilität:** Diese Lösung hängt stetig von den Eingangsdaten ab.

## Einfaches Beispiel

Sei  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , die Leitfähigkeit  $\sigma \equiv 1$  in  $\Omega$ , und  $\sigma \equiv 0$  ausserhalb von  $\Omega$ . Die Seiten von  $\Omega$  seien  $a, b, c, d$  wie in der Abbildung.

Auf  $a$  sei ein Potenzial in Form einer Funktion  $g$  gegeben. Das **direkte Problem**, das Potenzial  $u$  in  $\Omega$  zu bestimmen wird dann zu:

- (1)  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$
- (2)  $\nabla u \cdot n = 0$  auf  $b, c, d$
- (3)  $u = g$  auf  $a$



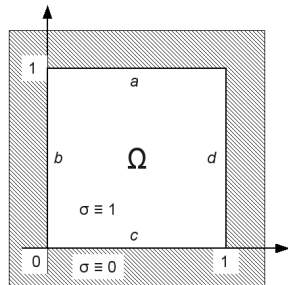
Falls  $g$  hinreichend schön ist, existiert eine eindeutige Lösung  $u = u(g)$ , die stetig von  $g$  abhängt, das direkte Problem ist also **gut gestellt**.

## Einfaches Beispiel

Sei  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , die Leitfähigkeit  $\sigma \equiv 1$  in  $\Omega$ , und  $\sigma \equiv 0$  ausserhalb von  $\Omega$ . Die Seiten von  $\Omega$  seien  $a, b, c, d$  wie in der Abbildung.

Auf  $a$  sei ein Potenzial in Form einer Funktion  $g$  gegeben. Das **direkte Problem**, das Potenzial  $u$  in  $\Omega$  zu bestimmen wird dann zu:

- (1)  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$
- (2)  $\nabla u \cdot n = 0$  auf  $b, c, d$
- (3)  $u = g$  auf  $a$



Falls  $g$  hinreichend schön ist, existiert eine eindeutige Lösung  $u = u(g)$ , die stetig von  $g$  abhängt, das direkte Problem ist also **gut gestellt**.

Nun sei  $f = u(g)|_c$  eine messtechnisch zugängliche Größe, und  $g$  die Größe, an der wir eigentlich interessiert sind. In Anlehnung an die Nomenklatur aus der Einleitung definieren wir also:

$X$  : Raum der Ursachen, also  $g \in X$ .

$Y$  : Raum der Wirkungen, also  $f \in Y$ .

$F$  : Vorwärtsoperator:  $F : X \rightarrow Y, F(g) = u(g)|_c$

Denn Messvorgang betrachten wir erst später.

Zunächst lösen wir das direkte Problem analytisch (Separationsansatz & Fourierentwicklung):

Ansatz:

$$N_k(x, y) := \cos(k\pi x) \cdot \cosh(k\pi y);$$

Einsetzen:

$$\Delta N_k(x, y) = -k^2 \pi^2 N_k(x, y) + k^2 \pi^2 N_k(x, y) = 0; \quad \Rightarrow N_k(x, y) \text{ erfüllt (1)}$$

$$\nabla N_k(x, y) = \begin{pmatrix} -k\pi \sin(k\pi x) \cdot \cosh(k\pi y) \\ k\pi \cos(k\pi x) \cdot \sinh(k\pi y) \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow (n_b \cdot \nabla N_k(x, y))|_b = k\pi \cdot \sin(k\pi 0) \cdot \cosh(k\pi y) = 0; \quad c, d \text{ analog} \quad \Rightarrow N_k(x, y) \text{ erfüllt (2)}$$

Zunächst lösen wir das direkte Problem analytisch (Separationsansatz & Fourierentwicklung):

Ansatz:

$$N_k(x, y) := \cos(k\pi x) \cdot \cosh(k\pi y);$$

Einsetzen:

$$\Delta N_k(x, y) = -k^2 \pi^2 N_k(x, y) + k^2 \pi^2 N_k(x, y) = 0; \quad \Rightarrow N_k(x, y) \text{ erfüllt (1)}$$

$$\nabla N_k(x, y) = \begin{pmatrix} -k\pi \sin(k\pi x) \cdot \cosh(k\pi y) \\ k\pi \cos(k\pi x) \cdot \sinh(k\pi y) \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow (n_b \cdot \nabla N_k(x, y))|_b = k\pi \cdot \sin(k\pi 0) \cdot \cosh(k\pi y) = 0; \quad c, d \text{ analog} \quad \Rightarrow N_k(x, y) \text{ erfüllt (2)}$$

Aufgrund der Linearität von  $\Delta$ ,  $\nabla$  und  $\cdot$  folgt aus dem Superpositionprinzip:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(k\pi x) \cdot \cosh(k\pi y) \quad \text{erfüllt (1) und (2)}$$

Durch Auswerten von  $u$  auf den Rändern  $a$  und  $c$  erhält man, dass für:

$$g(x) = u(x, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(k\pi x) \cdot \cosh(k\pi)$$

das direkte Problem durch

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(k\pi x)$$

gelöst wird. Falls also ein beliebiges  $g$  als eine Kosinusreihe darstellbar ist,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k[g] \cdot \cos(k\pi x)$$

so kann die Lösung des direkten Problems explizit angegeben werden:

$$u[g](x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k[g]}{\cosh(k\pi)} \cdot \cos(k\pi x) \cdot \cosh(k\pi y)$$

$$f(x) = F[g](x) = u[g](x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k[g]}{\cosh(k\pi)} \cdot \cos(k\pi x)$$

Die Wirkung des Vorwärtsoperators  $F$  lässt sich also ganz einfach an der Darstellung einer Funktion durch seine Kosinusreihe beschreiben:

Die Wirkung des Vorwärtsoperators  $F$  lässt sich also ganz einfach an der Darstellung einer Funktion durch seine Kosinusreihe beschreiben:

Die Koeffizienten  $a_k[g]$  der einzelnen **Moden** ( $\cos(k\pi x)$ ) werden mit dem Faktor  $1/\cosh(k\pi)$  multipliziert, d.h. höhere Moden werden **exponentiell stark gedämpft**!  
( $1/\cosh(k\pi) < 1$ ,  $\cosh(k\pi) \sim \exp(k\pi)$ )



Die Wirkung des Vorwärtsoperators  $F$  lässt sich also ganz einfach an der Darstellung einer Funktion durch seine Kosinusreihe beschreiben:

Die Koeffizienten  $a_k[g]$  der einzelnen **Moden** ( $\cos(k\pi x)$ ) werden mit dem Faktor  $1/\cosh(k\pi)$  multipliziert, d.h. höhere Moden werden **exponentiell stark gedämpft!**  
( $1/\cosh(k\pi) < 1$ ,  $\cosh(k\pi) \sim \exp(k\pi)$ )

Im Rahmen der Funktionalanalysis würde man sagen, dass die Funktionen  $\cos(k\pi x)$  **Eigenvektoren** des Vorwärtsoperators zu den **Eigenwerten**  $1/\cosh(k\pi)$  sind, d.h.  $F[\cos(k\pi x)](x) = \lambda_k \cos(k\pi x)$ ;  $\lambda_k = 1/\cosh(k\pi)$ , und dass das **Eigenwertspektrum**  $\{1/\cosh(k\pi) | k \in \mathbb{N}\}$  eine exponentiell fallende Folge bildet (Operator ist **kompakt**).

Die Wirkung des Vorwärtsoperators  $F$  lässt sich also ganz einfach an der Darstellung einer Funktion durch seine Kosinusreihe beschreiben:

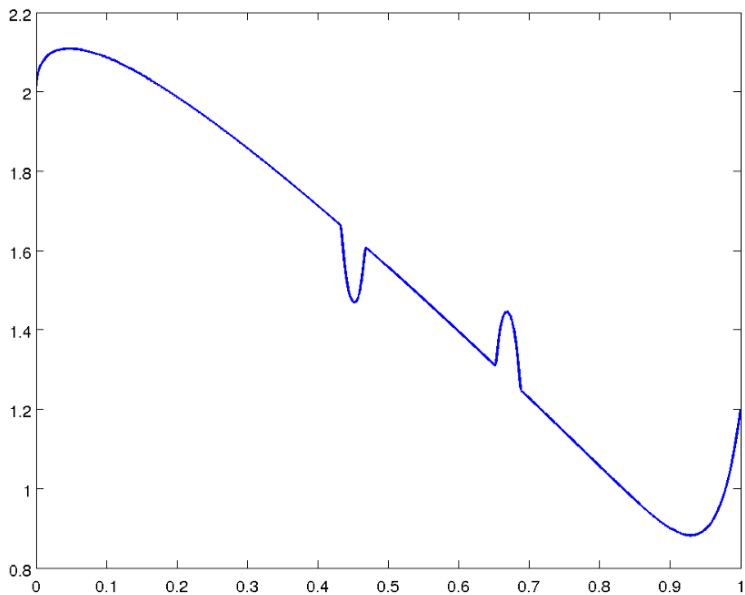
Die Koeffizienten  $a_k[g]$  der einzelnen **Moden** ( $\cos(k\pi x)$ ) werden mit dem Faktor  $1/\cosh(k\pi)$  multipliziert, d.h. höhere Moden werden **exponentiell stark gedämpft!**  
( $1/\cosh(k\pi) < 1$ ,  $\cosh(k\pi) \sim \exp(k\pi)$ )

Im Rahmen der Funktionalanalysis würde man sagen, dass die Funktionen  $\cos(k\pi x)$  **Eigenvektoren** des Vorwärtsoperators zu den **Eigenwerten**  $1/\cosh(k\pi)$  sind, d.h.  $F[\cos(k\pi x)](x) = \lambda_k \cos(k\pi x)$ ;  $\lambda_k = 1/\cosh(k\pi)$ , und dass das **Eigenwertspektrum**  $\{1/\cosh(k\pi) | k \in \mathbb{N}\}$  eine exponentiell fallende Folge bildet (Operator ist **kompakt**).

Was bedeutet diese Dämpfung der höheren Moden ( $k$  groß) anschaulich?

Bei einer Fourierreihe sind die **verschiedenen Moden** für die Approximation der **räumlich verschieden großen Strukturen** zuständig (sog Raumfrequenzspektrum):

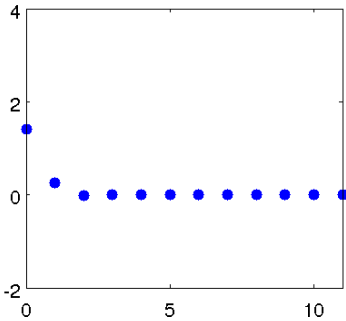
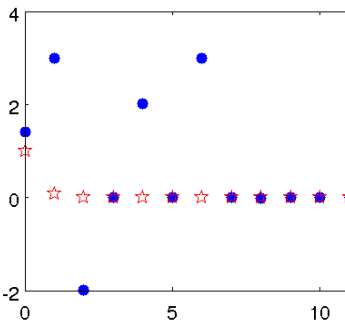
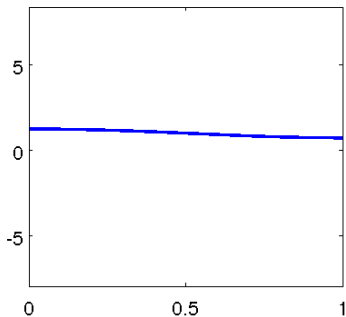
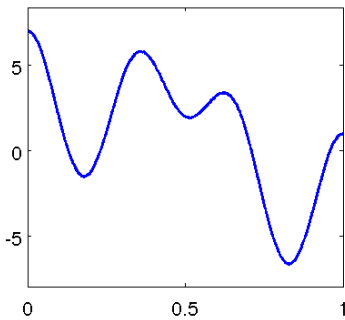
- Die ersten Moden approximieren das Grundniveau, und die groben räumlichen Trends der Funktion.
- Die höheren Moden approximieren die feinen räumlichen Strukturen.



Anschaulich ist damit auch klar, warum das direkte Problem so **gut konditioniert** ist, und **stetig von den Eingangsdaten** abhängt:

Kleine räumliche Änderungen machen sich nur in den höheren Moden der Kosinusreihe bemerkbar, werden daher exponentiell stark gedämpft und bewirken nur minimalste Veränderungen an der Lösung!

Wir werden sehen, dass gerade diese “netten” Eigenschaften des Vorwärtsoperators das inverse Problem extrem schwierig und schlecht gestellt machen.



Das **inverse Problem** in diesem Beispiel ist einfach:

*"Finde für gegebenes  $f \in Y$  ein  $g \in X$  s.d.  $F(g) = f$ "*

Die Frage ist also, ob  $F$  invertierbar ist.

Das **inverse Problem** in diesem Beispiel ist einfach:

*“Finde für gegebenes  $f \in Y$  ein  $g \in X$  s.d.  $F(g) = f$ ”*

Die Frage ist also, ob  $F$  invertierbar ist.

Aus der expliziten Darstellung des Vorwärtsoperators,

$$f(x) = F[g](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k[g]}{\cosh(k\pi)} \cdot \cos(k\pi x)$$

kann man den inversen Operator direkt ablesen:

$$g(x) = F^{-1}[f](x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k[f] \cdot \cosh(k\pi) \cdot \cos(k\pi x)$$

Der inverse Operator hat also die Eigenwerte  $\cosh(k\pi)$ , die **exponentiell steigen** mit  $k$ !

Das **inverse Problem** in diesem Beispiel ist einfach:

*“Finde für gegebenes  $f \in Y$  ein  $g \in X$  s.d.  $F(g) = f$ ”*

Die Frage ist also, ob  $F$  invertierbar ist.

Aus der expliziten Darstellung des Vorwärtsoperators,

$$f(x) = F[g](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k[g]}{\cosh(k\pi)} \cdot \cos(k\pi x)$$

kann man den inversen Operator direkt ablesen:

$$g(x) = F^{-1}[f](x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k[f] \cdot \cosh(k\pi) \cdot \cos(k\pi x)$$

Der inverse Operator hat also die Eigenwerte  $\cosh(k\pi)$ , die **exponentiell steigen** mit  $k$ !

Man kann leicht zeigen, dass  $F^{-1}$  **nicht stetig** ist:

Sei  $g$  beliebig, so ist  $g_\delta(x) = g(x) + \delta \cos(k\pi x)$  in der  $\|\cdot\|_{L^2}$ -Norm zwar beliebig nah an  $g$ , da  $\|g - g_\delta\|_{L^2} = \delta$ , aber  $\|F^{-1}[g] - F^{-1}[g_\delta]\|_{L^2} = \|\delta \cosh(k\pi) \cos(k\pi x)\|_{L^2} = \delta \cosh(k\pi)$  kann unabhängig von einem festen  $\delta$  beliebig groß gewählt werden.

Das inverse Problem ist im Sinne von Hadamard also **schlecht gestellt**, da die Lösung nicht stetig von den Eingangsdaten abhängt.



## Kleine räumliche Änderungen/Oszillationen in den Eingangsdaten werden exponentiell verstärkt!

Für die praktische Behandlung des inversen Problems ist dies ein kritischer Punkt, denn  $f$  muss gemessen werden und ist daher immer mit **Unsicherheiten** behaftet:

- **Abtastfehler:** Das Signal  $f$  wird nur an endlich vielen Messpunkten  $y_1, \dots, y_M$  erfasst; ist es nicht bandbegrenzt, ist Informationsverlust unvermeidbar (**Nyquist-Shannon-Abtasttheorem**). Die Unsicherheit ist dabei in den höheren Moden größer, da diese für die Auflösung der räumlich kleineren Strukturen sorgen, die eher durch zu grobes sampling “übersehen” werden.
- **Diskretisierungsfehler:** Die Messwerte werden digital aufgenommen, und verarbeitet, dabei schleichen sich Rundungsfehler ein.
- **Rauschen:** Das eigentliche Signal wird durch Rauschen überlagert. Je nach Rauschmodell (“*colors of noise*”) kommt zu dem Spektrum des Signals (Koeffizienten der Kosinusreihe) das Spektrum des Rauschens hinzu. Ein häufig benutztes Modell ist das des “**weißen Rauschens**” (i.i.d. normalverteilt), dessen Spektrum in jeder Mode gleich stark ist.

## Kleine räumliche Änderungen/Oszillationen in den Eingangsdaten werden exponentiell verstärkt!

Für die praktische Behandlung des inversen Problems ist dies ein kritischer Punkt, denn  $f$  muss gemessen werden und ist daher immer mit **Unsicherheiten** behaftet:

- **Abtastfehler:** Das Signal  $f$  wird nur an endlich vielen Messpunkten  $y_1, \dots, y_M$  erfasst; ist es nicht bandbegrenzt, ist Informationsverlust unvermeidbar (**Nyquist-Shannon-Abtasttheorem**). Die Unsicherheit ist dabei in den höheren Moden größer, da diese für die Auflösung der räumlich kleineren Strukturen sorgen, die eher durch zu grobes sampling “übersehen” werden.
- **Diskretisierungsfehler:** Die Messwerte werden digital aufgenommen, und verarbeitet, dabei schleichen sich Rundungsfehler ein.
- **Rauschen:** Das eigentliche Signal wird durch Rauschen überlagert. Je nach Rauschmodell (“*colors of noise*”) kommt zu dem Spektrum des Signals (Koeffizienten der Kosinusreihe) das Spektrum des Rauschens hinzu. Ein häufig benutztes Modell ist das des “**weißen Rauschens**” (i.i.d. normalverteilt), dessen Spektrum in jeder Mode gleich stark ist.

Diese Fehler führen zu kleinen räumlichen Änderungen/Oszillationen, die eigentlich nicht mehr im Signal sein sollten, machen sich also besonders in den (eigentlich abgedämpften) höheren Moden bemerkbar, und führen **ungefiltert zurückprojiziert** zu **starken Oszillationen** in der Lösung.

Die in den einfachen Beispiel auftretenden Probleme sind charakteristisch für das inverse Problem des Bioelektromagnetismus:

Allgemein ist das **Singulärwertspektrum** des Vorwärtsoperators exponentiell fallend.

Weiterhin ist das Problem oft **nicht klassisch lösbar**, da der Definitionsbereich des inversen Operators (= Bildbereich des Vorwärtsoperators) sehr "klein" ist, und die Störungen die Eingangsdaten aus diesem Bereich heraustreiben.

Die **Eindeutigkeit der Lösung** ist oft auch nicht mehr gegeben, speziell wenn die Eingangsdaten diskret abgetastet werden.

Hinzu kommen **spezielle Probleme** einzelner Modalitäten, wie z.B. eine besonders geringe Sensitivität auf ganz bestimmte Quellströme.

**Praktische Probleme** erschweren die Rekonstruktion zusätzlich, z.B. ein sehr geringes **Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR)**, und die Anfälligkeit für **Artefakte** in den Daten.

# Wege aus der Krise

## Wie kann man das Problem also lösen?

- Erhöhter Aufwand zur Rauschvermeidung bei der Datenaufnahme.
- Aufwendige **Datenvorverarbeitung**, u.a. PCA, ICA, artifact removal.
- Man schränkt die **Zahl der möglichen Quellkonfigurationen** drastisch ein:
  - **Parametrische Modelle:**  
Man reduziert die Freiheitsgrade der Quellkonfiguration drastisch, und passt diese so an, dass man die Daten bestmöglich erklären kann. Zum Beispiel kann man versuchen die Daten durch einen einzigen Stromdipol zu erklären, das erfordert die Bestimmung von 7 Parametern.
  - **Stromdichteverfahren:**  
Die Stromdichte wird als aus  $N$ , in einer Quellregion liegenden, einzelnen Dipolen zusammengesetzt.

# Wege aus der Krise

## Wie kann man das Problem also lösen?

- Erhöhter Aufwand zur Rauschvermeidung bei der Datenaufnahme.
- Aufwendige **Datenvorverarbeitung**, u.a. PCA, ICA, artifact removal.
- Man schränkt die **Zahl der möglichen Quellkonfigurationen** drastisch ein:
  - **Parametrische Modelle:**  
Man reduziert die Freiheitsgrade der Quellkonfiguration drastisch, und passt diese so an, dass man die Daten bestmöglich erklären kann. Zum Beispiel kann man versuchen die Daten durch einen einzigen Stromdipol zu erklären, das erfordert die Bestimmung von 7 Parametern.
  - **Stromdichteverfahren:**  
Die Stromdichte wird als aus  $N$ , in einer Quellregion liegenden, einzelnen Dipolen zusammengesetzt.

Bei den letzteren Verfahren gibt es zwei grobe Ansätze:

- **Klassische Regularisierung:** Das Problem wird durch ein besser gestelltes approximiert, dessen Lösung nicht zu weit von dem ursprünglichen abweicht.
- **Bayesianische Ansätze:** Die Quellkonfigurationen wird stochastisch modelliert, und das Problem wird als statistisches Problem umformuliert.

## 1 Einleitung: Medizinische Bildgebung

- Imaging Modalitäten
- Inverse Probleme

## 2 Das inverse Problem des Bioelektromagnetismus

- Einleitung
- Direktes Problem
- Quellmodelle
- Volumenleitermodelle
- Inverses Problem

## 3 Regularisierung

Man kann in unserem Beispiel das Problem,  $f = F[g]$  nach  $g$  aufzulösen, umformulierten zu einem **Minimierungsproblem**:

$$\tilde{g} = \underset{g}{\operatorname{argmin}} D(g); \quad D(g) = \|f - F[g]\|^2$$

Dadurch hat man natürlich noch nichts gewonnen.

Man kann in unserem Beispiel das Problem,  $f = F[g]$  nach  $g$  aufzulösen, umformulieren zu einem **Minimierungsproblem**:

$$\tilde{g} = \underset{g}{\operatorname{argmin}} D(g); \quad D(g) = \|f - F[g]\|^2$$

Dadurch hat man natürlich noch nichts gewonnen.

Die Idee **klassischer Regularisierung** ist es nun, das Funktional  $D(g)$ , das die Abweichung von den Messdaten bewertet, zu ersetzen durch die **gewichtete Summe** von  $D(g)$  und ein weiteren Funktional  $P(g)$ , sodass das Minimierungsproblem gut gestellt ist (regularisiert):

$$\tilde{g} = \underset{g}{\operatorname{argmin}} \{D(g) + \epsilon \cdot P(g)\}$$

Je größer der **Regularisierungsparameter**  $\epsilon$  gewählt wird, desto größer ist der regularisierende Effekt, d.h. das Problem ist besser konditioniert. Gleichzeitig ist natürlich die Abweichung von den Daten größer.



## Doch wie ist $P(g)$ zu wählen?

Neben der Eigenschaft, das Problem zu regularisieren, will man  $P$  oft so wählen, dass unerwünschte Eigenschaften der Lösung “bestraft” werden.

Mögliche Ansätze für das **Straffunktional**  $P(g)$  sind:

- $\|g\|_{L^2}^2 = \sum |g_i|^2$  : sog. Minimumnormlösung. Bestraft große 2-Norm, führt zum “Versmieren” der Lösung. Lineares Verfahren.
- $\|W \cdot g\|_2^2$  : gewichtete Minimumnormlösung, z.B.  $W$  als diskreter Laplace Operator. Lineares Verfahren.
- $\|g\|_{L^p}^p = \sum |g_i|^p$ ;  $0 < p < \infty$  : Für kleine  $p$  fördert dieses Funktional die “**sparsity**” der Lösung, d.h. Lösungen mit möglichst wenigen Einträgen ungleich null werden bevorzugt. Nichtlineares Verfahren.

Doch wie wirkt sich die Regularisierung, konkret die Minimumnormregularisierung, auf die Eigenschaften des inversen Problems aus?

Am einfachsten sieht man die Wirkung an unserem Beispielpblem:

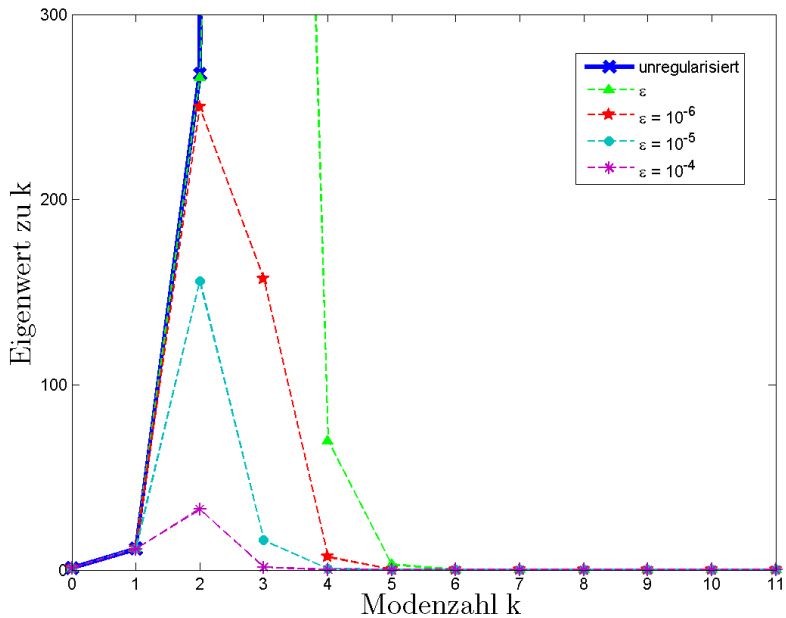
Sei dazu der Operator  $F_\epsilon^{-1}$  definiert durch

$$F_\epsilon^{-1}[f] := \operatorname{argmin}_g \{ \|f - F[g]\|^2 + \epsilon \|g\|_{L^2}^2 \}$$

Der inverse Operator  $F^{-1}[f]$  hatte die Eigenwerte  $\mu_k = \cosh(k\pi)$  zu den Eigenfunktionen  $\cos(k\pi x)$ . Man kann über die [Optimalitätsbedingung](#) erster Ordnung zeigen, dass die Eigenwerte des regularisierten Operators  $F_\epsilon^{-1}[f]$  zu den Eigenfunktionen  $\cos(k\pi x)$  gegeben sind durch:

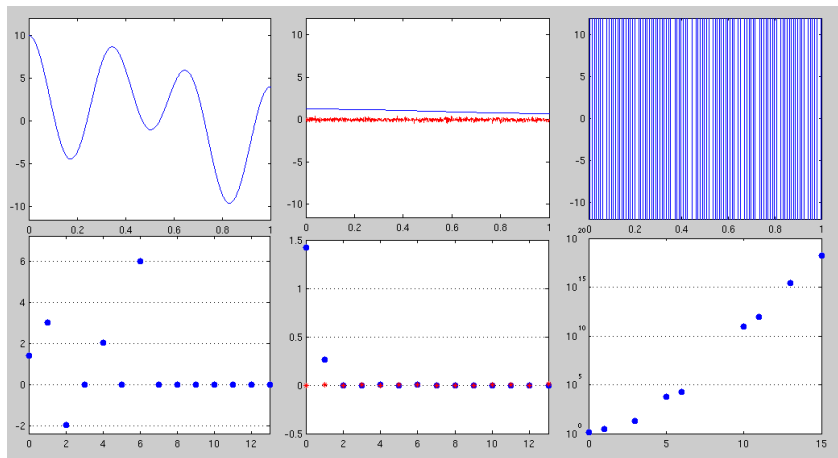
$$\mu_{\epsilon,k} = \frac{\mu_k}{1 + \epsilon \cdot \mu_k^2} = \frac{\cosh(k\pi)}{1 + \epsilon \cosh^2(k\pi)} < \frac{1}{\epsilon}$$

Da  $\epsilon$  klein ist, wirkt sich die Approximation auf die ersten Moden kaum aus, während die höheren Moden effektiv gedämpft werden, nach oben beschränkt bleiben, und gegen null fallen.



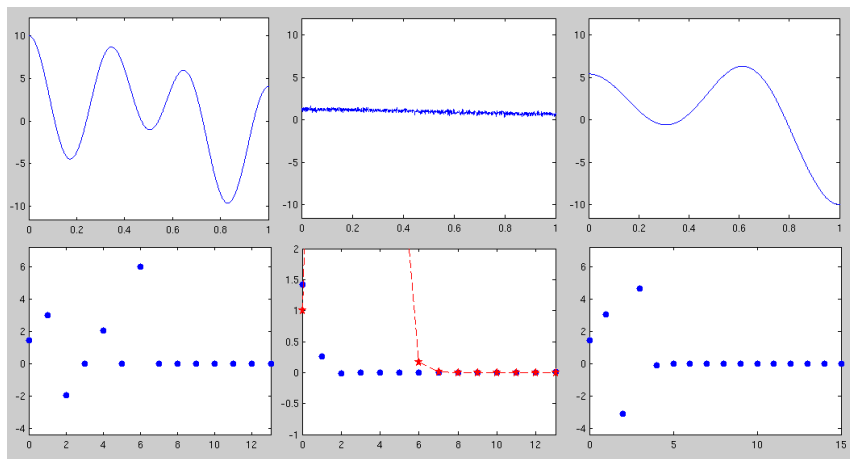
# Beispiel für eine unregularisierte Rückprojektion

Rauschniveau von 10%:



# Beispiel für eine regularisierte Rückprojektion

Rauschniveau von 10%,  $\epsilon = 8 \cdot 10^{-8}$  (l-curve-method):



...und Schluß!

Vielen Dank  
für  
die Aufmerksamkeit!