

pdfsubject=Porous Medium Equation

Notation

Wir benutzen, wie in bei der klassischen Wärmeleitungsgleichung die folgenden Bezeichnungen.

- $Q := \Omega \times \mathbb{R}_+$
- $Q_T := \Omega \times (0, T)$
- $Q^\tau := \Omega \times (\tau, \infty)$
- $Q_* := Q_T^\tau := \Omega \times (\tau, T)$
- $\Sigma_T := \partial\Omega \times [0, T)$
- $\Sigma := \partial\Omega \times [0, \infty)$

Homogenes Dirichlet Problem

Im heutigen Vortrag geht es um das homogene Dirichlet-Problem (HDP) zur allgemeinen Porösen Medium Gleichung (GPME).

$$u_t = \Delta\Phi(u) + f, \quad \forall (x, t) \in Q_T \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (2)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \Sigma_T \quad (3)$$

Die Zeit $T > 0$ kann sowohl endlich als auch unendlich sein.

Existenz einer klassischen Lösung

Unter den folgenden Annahmen

- $\Gamma = \partial\Omega \in C^{2,\alpha}$
- $\Phi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in C^2 , streng monoton steigend in zweiter Variable
- $\Phi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$
- $u_0, f \in C^\alpha$, beschränkt

Existiert klassische Lösung $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$, sodass

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + T\|f\|_{L^\infty(Q_T)}$$

Sind Φ , u_0 und f in C^∞ so auch u .

L^1 Stabilität der klassischen Lösung

Satz

Seien u und \hat{u} klassische Lösungen von (HDP) mit möglicherweise wechselndem Vorzeichen, Anfangsdaten u_0, \hat{u}_0 und Kraft f, \hat{f} . Für jedes $t > \tau \geq 0$ gilt:

$$\int_{\Omega} (u(x,t) - \hat{u}(x,t))_+ dx \leq \int_{\Omega} (u(x,\tau) - \hat{u}(x,\tau))_+ dx + \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (f - \hat{f})_+ dx dt$$

Und somit eine L^1 Kontraktion:

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_1 + \int_0^t \|f(s) - \hat{f}(s)\|_1 ds$$

Ziel des Vortrages

Zeige die Existenz einer schwachen Lösung für (HDP) unter folgender Allgemeinheit:

- $u_0 \in L^1(\Omega)$
- $f \in L^1(\Omega)$
- Annahmen an die Nicht-Linearität
 - $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton steigend
 - $\Phi(\pm\infty) = \pm\infty$
 - $\Phi(0) = 0$
- Später: u hat konstante Randwerte auf Σ

Inhaltsverzeichnis

Contents

1 Eindeutigkeit

1.1 schwache Lösungen

Schwache Lösungen

Wir beginnen zunächst mit der Definition einer schwachen Lösung ohne Rücksicht auf Startwert und Randbedingung

Definition 1. Eine schwache Lösung der (GPME) in Q_T ist eine lokal integrierbare Funktion $u \in L^1_{loc}(Q_T)$, sodass

- $\Phi(u) \in L^1_{loc}(0, T : W^{1,1}_{loc}(\Omega))$;

- Die Gleichung

$$\int \int_{Q_T} (\nabla \Phi(u) \cdot \nabla v - uv_t) dx dt = \int \int_{Q_T} f v dx dt$$

für alle Testfunktionen $v \in C_c^1(Q_T)$ erfüllt ist

Schwache Lösung der GDP (mit Randbedingung)

Definition 2. Eine meßbare Funktion u , definiert auf Q_T , ist eine schwache Lösung der (GPME) mit Nullrandbedingung, wenn

- $u \in L^1(\Omega \times (\tau, T - \tau))$, für alle $\tau > 0$ und $\Phi(u) \in L_{loc}^1(0, T : W_0^{1,1}(\Omega))$;
- die Gleichung

$$\int \int_{Q_T} (\nabla \Phi(u) \cdot \nabla v - uv_t) dx dt = \int \int_{Q_T} f v dx dt$$

für alle Testfunktionen $v \in C^1(\bar{Q}_T)$, die auf Σ_T verschwinden, gilt sowie für $0 \leq t \leq \tau$ und $T - \tau \leq t \leq T$ für gewisse $\tau > 0$.

Schwache Lösung des HDP mit Randbedingung und Startwert

Definition 3. Eine meßbare Funktion u , definiert auf Q_T , ist eine schwache Lösung von (HDP) wenn

- $u \in L^1(Q_T)$ und $\Phi(u) \in L^1(0, T : W_0^{1,1}(\Omega))$
- u die folgende Gleichung erfüllt

$$\begin{aligned} & \int \int_{Q_T} \{ \nabla \Phi(u) \cdot \nabla v - uv_t \} dx dt \\ &= \int_{\Omega} u_0(x) v(x, 0) dx + \int \int_{Q_T} f v dx dt \end{aligned} \quad (4)$$

für alle Funktionen $v \in C^1(\bar{Q}_T)$ die auf Σ und für $t = T$ verschwinden.

Beispiel einer schwachen Lösung

Eine nicht-triviale Lösung im Falle $f = 0$ ist die *explicit source-type solution* $u(x, t) = U(x, t; C)$.

Dies ist keine schwache Lösung in unserem Sinne, denn

- Die Anfangswerte sind nicht stetig
- Die Randwerte sind nicht notwendigerweise 0

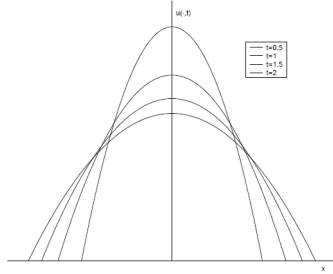


Figure 1: source type solution for PME

Beispiel einer schwachen Lösung (2)

Jedoch können wir auf folgende Weise schwache Lösungen erhalten:

Nehme $x_0 \in \Omega$, sei $\tau > 0$ und sei C konstant in U und hinreichend klein. Dann ist die Funktion

$$w(x, t) = U(x - x_0, t + \tau; C) \quad (5)$$

schwache Lösung von (HDP) in jedem Zeitintervall $(0, T)$ in dem der freie Rand in Ω liegt. D.h. wenn

$$T + \tau \leq c \text{dist}(x_0, \partial\Omega)^{d(m-1)+2}$$

Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Satz

Unter der zusätzlichen Annahme $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$ und $u \in L^2(Q_T)$ hat (HDP) maximal eine Lösung

Beweis Angenommen wir haben zwei schwache Lösungen u_1 und u_2 . Mit der Definition der schwachen Lösung folgt:

$$\int_{Q_T} \int (\nabla(\Phi(u_1) - \Phi(u_2)) \cdot \nabla v - (u_1 - u_2)v_t) dx dt = 0$$

Für alle Testfunktionen v .

Beweis: Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Nun wollen wir als Testfunktion die Oleinik-Testfunktion benutzen

$$v(x, t) = \int_t^T \Phi(u_1(x, s)) - \Phi(u_2(x, s)) ds, \text{ wenn } 0 < t < T \quad (6)$$

Selbst wenn v nicht die erforderliche Glätte (C^1) mitbringt, können wir v durch glatte Funktionen v_ε approximieren, sodass die schwache Formulierung erfüllt ist. Da

$$\begin{aligned} v_t &= -(\Phi(u_1) - \Phi(u_2)) \in L^2(Q_T) \\ \nabla v &= \int_t^T (\nabla\Phi(u_1) - \nabla\Phi(u_2)) ds \in L^2(Q_T) \end{aligned}$$

und weiter $v(t) \in H_0^1(\Omega)$ und $v(T) = 0$, können wir zum Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ übergehen und die schwache Formulierung ist erfüllt für v .

Beweis: Eindeutigkeit einer schwachen Lösung (2)

Nun,

$$\int \int_{Q_T} (\Phi(u_1) - \Phi(u_2))(u_1 - u_2) dx dt$$

$$+ \int \int_{Q_T} (\nabla(\Phi(u_1) - \Phi(u_2))) \cdot \left(\int_t^T (\nabla\Phi(u_1) - \nabla\Phi(u_2)) ds \right) dx dt = 0$$

Nach Integration des letzten Terms folgt:

$$\int_{Q_T} \int (\Phi(u_1) - \Phi(u_2))(u_1 - u_2) dx dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \int_0^T (\nabla\Phi(u_1) - \nabla\Phi(u_2)) ds \right\}^2 dx = 0$$

Da beide Terme nicht negativ sind, folgern wir, dass $u_1 = u_2$ fast überall ein muss.

Nicht-Existenz einer klassischen Lösung

Korollar

Es existieren Anfangsdaten für die (HDP) keine klassische Lösung annimmt, selbst wenn u_0 nicht-negativ und $f = 0$ ist.

Beweis Zuerst sei bemerkt, dass eine klassische Lösung von (HDP) auch eine schwache Lösung in unserem Sinne ist.

Zweitens sei bemerkt, dass das vorherige Beispiel einer schwachen Lösung $w(x, t)$ die im Eindeutigkeitssatz geforderte Regularität hat, aber keine klassische Lösung ist.

Mit dem Eindeutigkeitssatz folgt nun schon, dass keine weitere schwache Lösung von (HDP) existieren kann.

Somit kann für diese Daten auch keine klassische Lösung existieren.

2 Existenz

2.1 Schwache Energielösungen

Motivation

Wir haben die Eindeutigkeit in einer Unterklasse der schwachen Lösungen (nämlich $u \in L^2(Q_T)$ und $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$) gezeigt. Um physikalisch sinnvolle schwache Lösungen zu erhalten möchten wir die Klasse der Funktionen nun weiter einschränken.

Energiegleichung

Sei Φ glatt und u klassische Lösung von (HPD). Dann gilt

$$\underbrace{\int \int_{Q_T} |\nabla \Phi(u)|^2 dx dt}_{DE(u)} + \underbrace{\int_{\Omega} \Psi(u_T) dx}_{E_u(T)} = \int_{\Omega} \Psi(u_0) dx + \underbrace{\int \int_{Q_T} f \Phi(u) dx dt}_{w(f,T)}$$

Wobei $\Psi(u)$ Stammfunktion zu $\Phi(u)$

Dabei ist:

- $DE(u)$ die abgeführte Energie
- $E_u(T)$ die natürliche Energie
- $W(f, T)$ die Arbeit der externen Kraft

Schwache Energielösungen

Mit Hilfe der vorherigen Definitionen können wir den Funktionenraum, in dem wir nach schwachen Lösungen suchen, weiter einschränken.

Die Eindeutigkeit haben wir unter folgenden Annahmen gezeigt:

- $u \in L^2(Q_T)$
- $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$

Wir wollen die Existenz jedoch unter noch stärkeren Annahmen an u zeigen.

- $DE(u) < \infty$
- $E_u < \infty$

Die Klasse dieser Funktionen wollen wir mit WES bezeichnen.

2.2 Existenz für nicht-negative Daten

Erster Existenzsatz

Zunächst möchten wir zu nicht-negativen Daten u_0 und f die Existenz einer nicht-negativen Lösung $u \in WES$ von (HDP) zeigen. Dies ist ein typisches Problem für die Poröse Medien Gleichung. Die Technik, die wir benutzen, erlaubt die folgende Allgemeinheit:

- $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ stetig, streng monoton steigend in u mit $\Phi(0+) = 0$
- $\Phi(u)$ glatt mit $\Phi'(u) > 0$ für $u > 0$

Unsere Lösungen sollen die angenehmen Energieeigenschaften haben.

Vergleichsprinzip

Satz

Seien u, \tilde{u} schwache Lösungen mit Anfangsdaten u_0, \tilde{u}_0 , sodass $u_0 \leq \tilde{u}_0$ fast überall in Ω und $f \leq \tilde{f}$ fast überall in Q . Dann gilt:

$$u \leq \tilde{u}, \text{ fast überall in } Q$$

Insbesondere wenn $u_0, f \geq 0$ in Ω

$$u \geq 0 \text{ in } Q$$

Bemerkung

Ein solches Vergleichsprinzip ist für parabolische Gleichungen zu erwartende Eigenschaft. (Ob linear, nicht-linear, entartet oder nicht)

1. Existenzsatz

Satz

Sei Φ wie oben.

- Dann existiert eine schwache Lösung von (HPD) mit $u_0 \in L^1(\Omega)$, $\Psi(u_0) \in L^1(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ und forcing term $f \geq 0$, beschränkt.
- Die Lösung ist nicht-negativ und das Zeitintervall nicht beschränkt.
- Wir haben $\Psi(u) \in L^\infty(0, T : L^1(\Omega))$, $\forall T > 0$ und $\Psi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$. Es gilt eine Energiegleichung

$$\int \int_{Q_T} |\nabla \Phi(u)|^2 dx dt + \int_{\Omega} \Psi(u(t)) dx \leq \int_{\Omega} \Psi(u_0(x)) dx + \int \int_{Q_T} f \Phi(u) dx dt$$

- Damit ist u auch schwache Energielösung.
- Ausserdem gilt ein Vergleichsprinzip.

Beweisstrategie

Der erste Existenzbeweis ist in 3 Schritte unterteilt

- Angenommen $\Gamma = \partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $u_0 \geq 0$, in $C^2(\Omega)$ und mit kompaktem Träger. Sei $f \geq 0$ stetig und beschränkt in $\bar{\Omega}$.
- Angenommen u_0 ist beschränkt und verschwindet in der Nähe des Randes. Sei f beschränkt und nicht-negativ
- Zeige die Existenz im allgemeinen Fall

2. Schritt

Annahme: u_0 beschränkt, verschwindet nahe der Grenze. $f \geq 0$ beschränkt.

- Approximiere f : $f_n \rightarrow f$ fast überall
- Erhalte u_n wie im 1. Schritt
- Grenzübergang: Benutze L^1 -Stabilität anstatt Monotonie
- Konvergenz des Gradienten: unverändert
- Vergleichsprinzip: unverändert

3. Schritt

- Approximiere Ω durch aufsteigende Folge Ω_k mit $\partial\Omega_k = \Gamma_k \in C^{2+\alpha}$
- Betrachte: $u_{0k}(x) = \min\{u_0(x)\xi_k(x), k\}$
- Benutze Schritt 1+2 und erhalte u_k
- Setze u_k auf $\Omega \setminus \Omega_k$ mit 0 fort
- Approximation liefert: $u := \lim u_k$ ist schwache Lösung

Verbesserung der Annahmen an f

Durch Übergang zum Grenzwert in der L^1 -Norm erhalten wir auch einen Grenzwert

$$u = \lim u_n(x, t)$$

Selbst wenn f nicht in L^2 ist, solange $f \in L^1(Q_T)$ Wollen wir jedoch eine schwache Energielösung erhalten, muss

$$\nabla\Phi(u) \in L^2(Q_T)$$

gelten. In Hinsicht auf die Energieabschätzung und dem Sobolevschen Einbettungssatz muss $f \in L^p(Q)$ für p geeignet liegen. All dies führt zur Verbesserung der Annahmen an f .

Verbesserung der Annahmen an f

Korollar

Die Existenz einer schwachen Energielösung gilt auch unter den schwächeren Annahmen an f

- $f \geq 0$
- $f \in L^p(Q)$, mit $p = \begin{cases} 2d/d+2, & d \geq 3 \\ > 1, & d = 1, 2 \end{cases}$

nicht-positive Lösungen

Bemerkung

Die (GPME) ist invariant unter der Symmetrie

$$u \mapsto \hat{u} = -u$$

Es gilt dann:

Satz

Ist u schwache Lösung von (HDP) zu u_0, f, Φ . Dann ist $\hat{u}(x, t) := -u(x, t)$ schwache Lösung zu $\hat{u}_0(x) = -u_0(x), \hat{f}(x, t) = -f(x, t), \hat{\Phi} = -\Phi(-s)$

Daraus folgt die Existenz einer schwachen Energielösung für nicht-positive Daten.

2.3 Existenz von signed solutions

Existenzsatz für weak signed solutions

Satz

Sei $u_0 \in L_\psi(\Omega)$ und $f \in L^p(Q)$ mit p wie zuvor. Dann existiert eine schwache Lösung definiert auf einem unendlichen Zeitintervall, $T = \infty$. Die Lösung erfüllt:

- $u \in L^\infty(0, t : L_\psi(\Omega))$
- $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$
- u erfüllt die Energiegleichung
- das Vergleichsprinzip ist erfüllt

Beweisstrategie

Im Gegensatz zum 1. Existenzsatz können wir nicht einfach die Anfangswerte abändern und ein Problem mit klassischer Lösung erhalten. Solche Approximationen wäre nämlich von wechselndem Vorzeichen, sodass $u = 0$ nicht vermeidbar ist. Damit wäre die Gleichung möglicherweise entartet. (Da nicht mehr gleichm. parabolisch) Wir gehen also zu einer nicht-entarteten parabolischen PDGL über indem wir zu Φ eine Folge Φ_n wie folgt wählen.

- $\Phi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\Phi_n'(u) > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$
- $\Phi_n \rightarrow \Phi$ gleichmäßig auf kompakten Mengen.
- $\Phi_n(0) = 0$ für alle $x \in \Omega$

Beweisstrategie (2)

Wir benötigen die folgenden drei Lemmata

Lemma

Das Ergebnis bleibt bestehen wenn

- u_0, f und f_t beschränkt sind
- $\Gamma = \partial\Omega \in C^{2+\alpha}$
- Φ lokal Lipschitz-stetig in u

Lemma

Auf die vorherige Annahme an Φ kann verzichtet werden.

Lemma

Die Anfangsdaten u_0, f und f_t müssen nicht beschränkt sein.

Beweis des ersten Lemmas

Annahmen: u_0, f und f_t beschränkt, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, Φ lokal Lipschitz-stetig in u

- Fixiere $T > 0$ und betrachte das approximierte Problem mit
 - f_n glatt : $f_n \rightarrow f$ in L^p
 - $u_{0n} \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$: $u_{0n} \rightarrow u_0$ in L^Ψ
- Energieabschätzung: $\nabla\Phi_n$ beschränkt in $L^2(Q_T)$ (unabh. von n)
- Zeige $\Phi(u_n)_t \in L^2$ (Benutze Φ Lipschitz)
- Somit: $\{\Phi_n(u_n)\}$ beschränkt in $H^1(Q^*)$
- Grenzübergang: Ähnlich wie im 1. Existenzsatz
- Maximumprinzip und Vergleichsprinzip wie bisher.

Beweis Lemma 2+3

Annahmen: u_0, f und f_t beschränkt, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$

- Problem: Zeige $(\Phi_n)_t$ beschränkt

Nun Lemma 3:

- Benutze Approximationen wie im ersten Lemma
- Benutze L^1 Stabilität
- u_n erfüllt schwache Formulierung $\Rightarrow u$ schwache Lösung

Letzter Schritt: Übergang zu allgemeinem Ω wie im ersten Existenzbeweis

Bemerkung

- Jede so als Grenzwert erhaltene Lösung mit wechselndem Vorzeichen ist nach oben beschränkt durch eine nicht-negative Lösung mit Anfangsdaten

$$\begin{aligned}
 - u_0^+(x) &= \sup\{u_0(x), 0\} \\
 - f_+(x, t) &= \sup\{f(x, t), 0\}
 \end{aligned}$$

- und nach unten durch die nicht-positive Lösung mit Anfangsdaten

$$\begin{aligned}
 - u_0^-(x) &= \inf\{u_0(x), 0\} \\
 - f_-(x, t) &= \min\{f(x, t), 0\}
 \end{aligned}$$

- Erinnerung: Die Konvergenz der u_n gegen u in der Approximation findet in $L^1(Q)$ statt. Wir haben keinen *time delay* eingeführt.

2.4 Konstante Randwerte

Existenz schwacher Lösungen für konstante Randwerte

Korollar

Unter den selben Annahmen an u_0 und f wie oben können wir (HDP) eindeutig lösen für konstante Randwerte.

$$u = C \text{ auf } \Sigma$$

Für $C > 0$ ist die Lösung größer als im Standard HDP und für $C < 0$ kleiner.

- Das Vergleichsprinzip ist erfüllt
- Im stetigen Fall erfolgt der Beweis durch Übergang von $\hat{\Phi}(x) = -\Phi(-x)$
- Im allgemeinen Fall wird der Beweis durch eine Approximation angepasst.

3 Eigenschaften

3.1 L^1 Stabilität

Stabilität der schwachen Lösungen

Satz

Für zwei schwache Energielösungen u und \hat{u} mit Anfangsdaten u_0 und \hat{u}_0 sowie Kraftthermen f und \hat{f} gilt für alle $t > \tau \geq 0$

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))_+\|_1 \leq \|(u(\tau) - \hat{u}(\tau))_+\|_1 + \int_\tau^t \|(f(s) - \hat{f}(s))_+\|_1 ds$$

und somit auch:

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_1 + \int_0^t \|f(s) - \hat{f}(s)\|_1 ds$$

Proof. Die L^1 Stabilität für klassische Lösungen vorausgesetzt, ergibt sich der Satz mittels Approximation \square

L^1 Stabilität \Rightarrow Vergleichsprinzip

Bemerkung

Die Kontraktionseigenschaft erlaubt es uns auch die Eindeutigkeit der Lösung von (HDP) mit der L^1 Theorie zu beweisen. Der Beweis ist total unterschiedlich zu dem hier gezeigten. Die Abschätzung zeigt nicht nur die L^1 Abhängigkeit von den Daten sondern auch das Vergleichsprinzip.

Proof. Sei $u_0 \leq \hat{u}_0$ fast überall und $f \leq \hat{f}$ fast überall in Q . Dann folgt $(u_0 - \hat{u}_0)_+ = 0$ fast überall. Die Kontraktion liefert nun: $(u(t) - \hat{u}(t))_+ = 0$ fast überall. Somit folgt wie gefordert: $u(t) \leq \hat{u}(t)$ fast überall \square

L^1 Stabilität: Verallgemeinerung von Φ

Der Beweis des L^1 Kontraktionsprinzips ist unabhängig von besonderen Eigenschaften der Nicht-Linearität Φ . Der Beweis funktioniert auch für jedes monotone Φ .

L^1 Stabilität: Erweiterung des Lösungsbegriffs

Die gezeigte Kontraktionseigenschaft kann auch genutzt werden um sogenannte *limit solutions* einzuführen. Die Klasse der Grenzlösungen LS besteht aus L^1 integrierbaren Funktionen. Eine Grenzlösung für (HDP) ergibt sich somit als Grenzwert von schwachen Energielösungen für ein entsprechend abgeändertes Problem. Die Grenzlösungen sind eine echte Erweiterung der schwachen Energielösungen.

3.2 Energieeigenschaften

Energieeigenschaften

Unsere Schwache Energielösung u erfüllt eine der folgenden Energieabschätzungen

$$\int \int_{Q_T} |\nabla \Phi(u)|^2 dx dt + \int_{\Omega} \Psi(u(x, T)) dx \leq \int_{\Omega} \Psi(u_0(x)) dx + \int \int_{Q_T} f \Phi(u) dx dt$$

Konsequenzen

- $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$ (Poincaré)
- Schranke von $\Phi(u)$ nur abh. von
 - Norm von u_0 in $L_{\Psi}(\Omega)$
 - Norm von f in $L^p(\Omega_T)$
- $u(t)$ kann in $L^{\infty}(0, T : L_{\Psi}(\Omega))$ genauso abgeschätzt werden.

Monotonie in der L^p -Norm

Satz

Zusätzlich zu den Annahmen des 2. Existenzsatzes sei $u_0 \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$ und $f = 0$.
Dann ist $u(\cdot, t) \in L^p(\Omega)$, $\forall t > 0$ und

$$\|u(\cdot, t)\|_p \leq \|u_0\|_p$$

Proof. Der Beweis erfolgt durch Approximation

□