

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Porous Medium Equation

Existenz, Eindeutigkeit und Regularität

Lars Ruthotto

Institut für numerische Mathematik
Universität Münster

15.12.2008

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Wir benutzen, wie in bei der klassischen Wärmeleitungsgleichung die folgenden Bezeichnungen.

- $Q := \Omega \times \mathbb{R}_+$
- $Q_T := \Omega \times (0, T)$
- $Q^\tau := \Omega \times (\tau, \infty)$
- $Q^* := Q_T^\tau := \Omega \times (\tau, T)$
- $\Sigma_T := \partial\Omega \times [0, T)$
- $\Sigma := \partial\Omega \times [0, \infty)$

Homogenes Dirichlet Problem

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Im heutigen Vortrag geht es um das homogene Dirichlet-Problem (HDP) zur allgemeinen Porösen Medium Gleichung (GPME).

$$u_t = \Delta \Phi(u) + f, \quad \forall (x, t) \in Q_T \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (2)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \Sigma_T \quad (3)$$

Die Zeit $T > 0$ kann sowohl endlich als auch unendlich sein.

Existenz einer klassischen Lösung

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Unter den folgenden Annahmen

- $\Gamma = \partial\Omega \in C^{2,\alpha}$
- $\Phi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in C^2 , streng monoton steigend in zweiter Variable
- $\Phi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$
- $u_0, f \in C^\alpha$, beschränkt

Existiert klassische Lösung $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$, sodass

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + T \|f\|_{L^\infty(Q_T)}$$

Sind Φ , u_0 und f in C^∞ so auch u .

L^1 Stabilität der klassischen Lösung

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Satz

Seien u und \hat{u} klassische Lösungen von (HDP) mit möglicherweise wechselndem Vorzeichen, Anfangsdaten u_0, \hat{u}_0 und Kraft f, \hat{f} .

Für jedes $t > \tau \geq 0$ gilt:

$$\int_{\Omega} (u(x, t) - \hat{u}(x, t))_+ dx \leq \int_{\Omega} (u(x, \tau) - \hat{u}(x, \tau))_+ dx + \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (f - \hat{f})_+ dx dt$$

Und somit eine L^1 Kontraktion:

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_1 + \int_0^t \|f(s) - \hat{f}(s)\|_1 ds$$

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Zeige die Existenz einer schwachen Lösung für (HDP) unter folgender
Allgemeinheit:

- $u_0 \in L^1(\Omega)$
- $f \in L^1(\Omega)$
- Annahmen an die Nicht-Linearität
 - $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton steigend
 - $\Phi(\pm\infty) = \pm\infty$
 - $\Phi(0) = 0$
- Später: u hat konstante Randwerte auf Σ

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Inhaltsverzeichnis

1 Eindeutigkeit

schwache Lösungen

2 Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative Daten

Existenz von signed solutions

Konstante Randwerte

3 Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Wir beginnen zunächst mit der Definition einer schwachen Lösung ohne Rücksicht auf Startwert und Randbedingung

Definition

Eine schwache Lösung der (GPME) in Q_T ist eine lokal integrierbare Funktion $u \in L^1_{loc}(Q_T)$, sodass

- $\Phi(u) \in L^1_{loc}(0, T; W^{1,1}_{loc}(\Omega))$;
- Die Gleichung

$$\int \int_{Q_T} (\nabla \Phi(u) \cdot \nabla \mathbf{v} - u \mathbf{v}_t) dx dt = \int \int_{Q_T} f \mathbf{v} dx dt$$

für alle Testfunktionen $\mathbf{v} \in C^1_c(Q_T)$ erfüllt ist

Schwache Lösung der GDP (mit Randbedingung)

Definition

Eine meßbare Funktion u , definiert auf Q_T , ist eine schwache Lösung der (GPME) mit Nullrandbedingung, wenn

- $u \in L^1(\Omega \times (\tau, T - \tau))$, für alle $\tau > 0$ und $\Phi(u) \in L^1_{loc}(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$;
- die Gleichung

$$\int \int_{Q_T} (\nabla \Phi(u) \cdot \nabla v - u v_t) dx dt = \int \int_{Q_T} f v dx dt$$

für alle Testfunktionen $v \in C^1(\bar{Q}_T)$, die auf Σ_T verschwinden, gilt sowie für $0 \leq t \leq \tau$ und $T - \tau \leq t \leq T$ für gewisse $\tau > 0$.

Schwache Lösung des HDP mit Randbedingung und Startwert

Definition

Eine meßbare Funktion u , definiert auf Q_T , ist eine schwache Lösung von (HDP) wenn

- $u \in L^1(Q_T)$ und $\Phi(u) \in L^1(0, T : W_0^{1,1}(\Omega))$
- u die folgende Gleichung erfüllt

$$\begin{aligned} & \int \int_{Q_T} \{ \nabla \Phi(u) \cdot \nabla v - u v_t \} dx dt \\ &= \int_{\Omega} u_0(x) v(x, 0) dx + \int \int_{Q_T} f v dx dt \end{aligned} \quad (4)$$

für alle Funktionen $v \in C^1(\bar{Q}_T)$ die auf Σ und für $t = T$ verschwinden.

Beispiel einer schwachen Lösung

Eine nicht-triviale Lösung im Falle $f = 0$ ist die *explicit source-type solution*

$$u(x, t) = U(x, t; C).$$

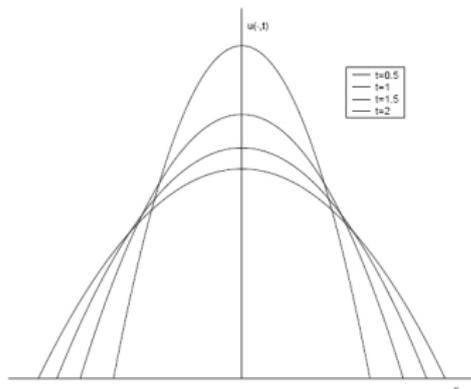


Figure: source type solution for PME

Dies ist keine schwache Lösung in unserem Sinne, denn

- Die Anfangswerte sind nicht stetig
- Die Randwerte sind nicht notwendigerweise 0

Beispiel einer schwachen Lösung (2)

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Jedoch können wir auf folgende Weise schwache Lösungen erhalten:

Nehme $x_0 \in \Omega$, sei $\tau > 0$ und sei C konstant in U und hinreichend klein. Dann ist die Funktion

$$w(x, t) = U(x - x_0, t + \tau; C) \quad (5)$$

schwache Lösung von (HDP) in jedem Zeitintervall $(0, T)$ in dem der freie Rand in Ω liegt. D.h. wenn

$$\tau + \tau \leq c \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)^{d(m-1)+2}$$

Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Satz

Unter der zusätzlichen Annahme $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$ und $u \in L^2(Q_T)$ hat (HDP) maximal eine Lösung

Beweis Angenommen wir haben zwei schwache Lösungen u_1 und u_2 . Mit der Definition der schwachen Lösung folgt:

$$\int_{Q_T} \int (\nabla(\Phi(u_1) - \Phi(u_2))) \cdot \nabla v - (u_1 - u_2)v_t \, dxdt = 0$$

Für alle Testfunktionen v .

Beweis: Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Nun wollen wir als Testfunktion die Oleinik-Testfunktion benutzen

$$v(x, t) = \int_t^T \Phi(u_1(x, s)) - \Phi(u_2(x, s)) ds, \text{ wenn } 0 < t < T \quad (6)$$

Selbst wenn v nicht die erforderliche Glätte (C^1) mitbringt, können wir v durch glatte Funktionen v_ε approximieren, sodass die schwache Formulierung erfüllt ist. Da

$$\begin{aligned} v_t &= -(\Phi(u_1) - \Phi(u_2)) \in L^2(Q_T) \\ \nabla v &= \int_t^T (\nabla \Phi(u_1) - \nabla \Phi(u_2)) ds \in L^2(Q_T) \end{aligned}$$

und weiter $v(t) \in H_0^1(\Omega)$ und $v(T) = 0$, können wir zum Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ übergehen und die schwache Formulierung ist erfüllt für v .

Beweis: Eindeutigkeit einer schwachen Lösung (2)

Nun,

$$\int \int_{Q_T} (\Phi(u_1) - \Phi(u_2))(u_1 - u_2) dx dt$$

$$+ \int \int_{Q_T} (\nabla(\Phi(u_1) - \Phi(u_2))) \cdot \left(\int_t^T (\nabla\Phi(u_1) - \nabla\Phi(u_2)) ds \right) dx dt = 0$$

Nach Integration des letzten Terms folgt:

$$\int \int_{Q_T} (\Phi(u_1) - \Phi(u_2))(u_1 - u_2) dx dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \int_0^T (\nabla\Phi(u_1) - \nabla\Phi(u_2)) ds \right\}^2 dx = 0$$

Da beide Terme nicht negativ sind, folgern wir, dass $u_1 = u_2$ fast überall ein muss.

Nicht-Existenz einer klassischen Lösung

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Korollar

Es existieren Anfangsdaten für die (HDP) keine klassische Lösung annimmt, selbst wenn u_0 nicht-negativ und $f = 0$ ist.

Beweis Zuerst sei bemerkt, dass eine klassische Lösung von (HDP) auch eine schwache Lösung in unserem Sinne ist.

Zweitens sei bemerkt, dass das vorherige Beispiel einer schwachen Lösung $w(x, t)$ die im Eindeutigkeitsatz geforderte Regularität hat, aber keine klassische Lösung ist.

Mit dem Eindeutigkeitsatz folgt nun schon, dass keine weitere schwache Lösung von (HDP) existieren kann.

Somit kann für diese Daten auch keine klassische Lösung existieren.

Wir haben die Eindeutigkeit in einer Unterklasse der schwachen Lösungen (nämlich $u \in L^2(Q_T)$ und $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$) gezeigt.

Um physikalisch sinnvolle schwache Lösungen zu erhalten möchten wir die Klasse der Funktionen nun weiter einschränken.

Energiegleichung

Sei Φ glatt und u klassische Lösung von (HPD). Dann gilt

$$\underbrace{\int \int_{Q_T} |\nabla \Phi(u)|^2 dx dt}_{DE(u)} + \underbrace{\int_{\Omega} \Psi(u_T) dx}_{E_u(T)} = \int_{\Omega} \Psi(u_0) dx + \underbrace{\int \int_{Q_T} f \Phi(u) dx dt}_{w(f, T)}$$

Wobei $\Psi(u)$ Stammfunktion zu $\Phi(u)$

Dabei ist:

- $DE(u)$ die abgeführte Energie
- $E_u(T)$ die natürliche Energie
- $W(f, T)$ die Arbeit der externen Kraft

Schwache Energielösungen

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Mit Hilfe der vorherigen Definitionen können wir den Funktionenraum, in dem wir nach schwachen Lösungen suchen, weiter einschränken.

Die Eindeutigkeit haben wir unter folgenden Annahmen gezeigt:

- $u \in L^2(Q_T)$
- $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$

Wir wollen die Existenz jedoch unter noch stärkeren Annahmen an u zeigen.

- $DE(u) < \infty$
- $E_u < \infty$

Die Klasse dieser Funktionen wollen wir mit *WES* bezeichnen.

Erster Existenzsatz

Zunächst möchten wir zu nicht-negativen Daten u_0 und f die Existenz einer nicht-negativen Lösung $u \in WES$ von (HDP) zeigen.

Dies ist ein typisches Problem für die Poröse Medien Gleichung.

Die Technik, die wir benutzen, erlaubt die folgende Allgemeinheit:

- $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ stetig, streng monoton steigend in u mit $\Phi(0+) = 0$
- $\Phi(u)$ glatt mit $\Phi'(u) > 0$ für $u > 0$

Unsere Lösungen sollen die angenehmen Energieeigenschaften haben.

Vergleichsprinzip

Satz

Seien u, \tilde{u} schwache Lösungen mit Anfangsdaten u_0, \tilde{u}_0 , sodass $u_0 \leq \tilde{u}_0$ fast überall in Ω und $f \leq \tilde{f}$ fast überall in Q

Dann gilt:

$$u \leq \tilde{u}, \text{ fast überall in } Q$$

Insbesondere wenn $u_0, f \geq 0$ in Ω

$$u \geq 0 \text{ in } Q$$

Bemerkung

Ein solches Vergleichsprinzip ist für parabolische Gleichungen zu erwartende Eigenschaft. (Ob linear, nicht-linear, entartet oder nicht)

1. Existenzsatz

Satz

Sei Φ wie oben.

- Dann existiert eine schwache Lösung von (HPD) mit $u_0 \in L^1(\Omega)$, $\Psi(u_0) \in L^1(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ und forcing term $f \geq 0$, beschränkt.
- Die Lösung ist nicht-negativ und das Zeitintervall nicht beschränkt.
- Wir haben $\Psi(u) \in L^\infty(0, T : L^1(\Omega))$, $\forall T > 0$ und $\Psi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$. Es gilt eine Energieungleichung

$$\int \int_{Q_T} |\nabla \Phi(u)|^2 dxdt + \int_{\Omega} \Psi(u(t)) dx \leq \int_{\Omega} \Psi(u_0(x)) dx + \int \int_{Q_T} f \Phi(u) dxdt$$

- Damit ist u auch schwache Energielösung.
- Ausserdem gilt ein Vergleichsprinzip.

Beweisstrategie

Der erste Existenzbeweis ist in 3 Schritte unterteilt

- Angenommen $\Gamma = \partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $u_0 \geq 0$, in $C^2(\Omega)$ und mit kompaktem Träger. Sei $f \geq 0$ stetig und beschränkt in $\bar{\Omega}$.
- Angenommen u_0 ist beschränkt und verschwindet in der Nähe des Randes. Sei f beschränkt und nicht-negativ
- Zeige die Existenz im allgemeinen Fall

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Annahme: u_0 beschränkt, verschwindet nahe der Grenze. $f \geq 0$ beschränkt.

- Approximiere f : $f_n \rightarrow f$ fast überall
- Erhalte u_n wie im 1. Schritt
- Grenzübergang: Benutze L^1 -Stabilität anstatt Monotonie
- Konvergenz des Gradienten: unverändert
- Vergleichsprinzip: unverändert

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

- Approximiere Ω durch aufsteigende Folge Ω_k mit $\partial\Omega_k = \Gamma_k \in C^{2+\alpha}$
- Betrachte: $u_{0k}(x) = \min\{u_0(x)\xi_k(x), k\}$
- Benutze Schritt 1+2 und erhalte u_k
- Setze u_k auf $\Omega \setminus \Omega_k$ mit 0 fort
- Approximation liefert: $u := \lim u_k$ ist schwache Lösung

Verbesserung der Annahmen an f

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Durch Übergang zum Grenzwert in der L^1 -Norm erhalten wir auch einen Grenzwert

$$u = \lim u_n(x, t)$$

Selbst wenn f nicht in L^2 ist, solange $f \in L^1(Q_T)$

Wollen wir jedoch eine schwache Energielösung erhalten, muss

$$\nabla \Phi(u) \in L^2(Q_T)$$

gelten. In Hinsicht auf die Energieabschätzung und dem Sobolevschen Einbettungssatz muss $f \in L^p(Q)$ für p geeignet liegen.

All dies führt zur Verbesserung der Annahmen an f .

Verbesserung der Annahmen an f

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

**Existenz für nicht-negative
Daten**

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Korollar

Die Existenz einer schwachen Energielösung gilt auch unter den schwächeren Annahmen an f

- $f \geq 0$
- $f \in L^p(Q)$, mit $p = \left\{ \begin{array}{ll} 2d/d + 2, & d \geq 3 \\ > 1, & d = 1, 2 \end{array} \right\}$

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Bemerkung

Die (GPME) ist invariant unter der Symmetrie

$$u \mapsto \hat{u} = -u$$

Es gilt dann:

Satz

Ist u schwache Lösung von (HDP) zu u_0, f, Φ .

Dann ist $\hat{u}(x, t) := -u(x, t)$ schwache Lösung zu
 $\hat{u}_0(x) = -u_0(x), \hat{f}(x, t) = -f(x, t), \hat{\Phi} = -\Phi(-s)$

Daraus folgt die Existenz einer schwachen Energielösung für nicht-positive Daten.

Existenzsatz für weak signed solutions

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Satz

Sei $u_0 \in L_\psi(\Omega)$ und $f \in L^p(Q)$ mit p wie zuvor.

Dann existiert eine schwache Lösung definiert auf einem unendlichen Zeitintervall, $T = \infty$. Die Lösung erfüllt:

- $u \in L^\infty(0, t : L_\psi(\Omega))$
- $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$
- u erfüllt die Energieungleichung
- das Vergleichsprinzip ist erfüllt

Beweisstrategie

Im Gegensatz zum 1. Existenzsatz können wir nicht einfach die Anfangswerte abändern und ein Problem mit klassischer Lösung erhalten.

Solche Approximationen wäre nämlich von wechselndem Vorzeichen, sodass $u = 0$ nicht vermeidbar ist.

Damit wäre die Gleichung möglicherweise entartet. (Da nicht mehr gleichm. parabolisch)

Wir gehen also zu einer nicht-entarteten parabolischen PDGL über indem wir zu Φ eine Folge Φ_n wie folgt wählen.

- $\Phi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\Phi_n'(u) > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$
- $\Phi_n \rightarrow \Phi$ gleichmäßig auf kompakten Mengen.
- $\Phi_n(0) = 0$ für alle $x \in \Omega$

Beweisstrategie (2)

Wir benötigen die folgenden drei Lemmata

Lemma

Das Ergebnis bleibt bestehen wenn

- u_0 , f und f_t beschränkt sind
- $\Gamma = \partial\Omega \in C^{2+\alpha}$
- Φ lokal Lipschitz-stetig in u

Lemma

Auf die vorherige Annahme an Φ kann verzichtet werden.

Lemma

Die Anfangsdaten u_0, f und f_t müssen nicht beschränkt sein.

Beweis des ersten Lemmas

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Annahmen: u_0, f und f_t beschränkt, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, Φ lokal Lipschitz-stetig in u

- Fixiere $T > 0$ und betrachte das approximierte Problem mit
 - f_n glatt : $f_n \rightarrow f$ in L^p
 - $u_{0n} \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$: $u_{0n} \rightarrow u_0$ in L^Ψ
- Energieabschätzung: $\nabla\Phi_n$ beschränkt in $L^2(Q_T)$ (unabh. von n)
- Zeige $\Phi(u_n)_t \in L^2$ (Benutze Φ Lipschitz)
- Somit: $\{\Phi_n(u_n)\}$ beschränkt in $H^1(Q^*)$
- Grenzübergang: Ähnlich wie im 1. Existenzsatz
- Maximumprinzip und Vergleichsprinzip wie bisher.

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Annahmen: u_0, f und f_t beschränkt, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$

- Problem: Zeige $(\Phi_n)_t$ beschränkt

Nun Lemma 3:

- Benutze Approximationen wie im ersten Lemma
- Benutze L^1 Stabilität
- u_n erfüllt schwache Formulierung $\Rightarrow u$ schwache Lösung

Letzter Schritt: Übergang zu allgemeinem Ω wie im ersten Existenzbeweis

Bemerkung

- Jede so als Grenzwert erhaltene Lösung mit wechselndem Vorzeichen ist nach oben beschränkt durch eine nicht-negative Lösung mit Anfangsdaten
 - $u_0^+(x) = \sup\{u_0(x), 0\}$
 - $f_+(x, t) = \sup\{f(x, t), 0\}$
- und nach unten durch die nicht-positive Lösung mit Anfangsdaten
 - $u_0^-(x) = \inf\{u_0(x), 0\}$
 - $f_-(x, t) = \min\{f(x, t), 0\}$
- Erinnerung: Die Konvergenz der u_n gegen u in der Approximation findet in $L^1(Q)$ statt. Wir haben keinen *time delay* eingeführt.

Existenz schwacher Lösungen für konstante Randwerte

Korollar

Unter den selben Annahmen an u_0 und f wie oben können wir (HDP) eindeutig lösen für konstante Randwerte.

$$u = C \text{ auf } \Sigma$$

Für $C > 0$ ist die Lösung größer als im Standard HDP und für $C < 0$ kleiner.

- Das Vergleichsprinzip ist erfüllt
- Im stetigen Fall erfolgt der Beweis durch Übergang von $\hat{\Phi}(x) = -\Phi(-x)$
- Im allgemeinen Fall wird der Beweis durch eine Approximation angepasst.

Stabilität der schwachen Lösungen

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Satz

Für zwei schwache Energielösungen u und \hat{u} mit Anfangsdaten u_0 und \hat{u}_0 sowie Kraftthermen f und \hat{f} gilt für alle $t > \tau \geq 0$

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))_+\|_1 \leq \|(u(\tau) - \hat{u}(\tau))_+\|_1 + \int_{\tau}^t \|(f(s) - \hat{f}(s))_+\|_1 ds$$

und somit auch:

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_1 + \int_0^t \|f(s) - \hat{f}(s)\|_1 ds$$

Proof.

Die L^1 Stabilität für klassische Lösungen vorausgesetzt, ergibt sich der Satz mittels Approximation □

L^1 Stabilität \Rightarrow Vergleichsprinzip

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Bemerkung

Die Kontraktionseigenschaft erlaubt es uns auch die Eindeutigkeit der Lösung von (HDP) mit der L^1 Theorie zu beweisen. Der Beweis ist total unterschiedlich zu dem hier gezeigten.

Die Abschätzung zeigt nicht nur die L^1 Abhängigkeit von den Daten sondern auch das Vergleichsprinzip.

Proof.

Sei $u_0 \leq \hat{u}_0$ fast überall und $f \leq \hat{f}$ fast überall in Q .

Dann folgt $(u_0 - \hat{u}_0)_+ = 0$ fast überall

Die Kontraktion liefert nun: $(u(t) - \hat{u}(t))_+ = 0$ fast überall

Somit folgt wie gefordert : $u(t) \leq \hat{u}(t)$ fast überall



L^1 Stabilität: Verallgemeinerung von Φ

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Der Beweis des L^1 Kontraktionsprinzips ist unabhängig von besonderen Eigenschaften der Nicht-Linearität Φ .

Der Beweis funktioniert auch für jedes monotone Φ

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

L^1 Stabilität: Erweiterung des Lösungsbegriffs

Die gezeigte Kontraktionseigenschaft kann auch genutzt werden um sogenannte *limit solutions* einzuführen.

Die Klasse der Grenzlösungen LS besteht aus L^1 integralen Funktionen. Eine Grenzlösung für (HDP) ergibt sich somit als Grenzwert von schwachen Energielösungen für ein entsprechend abgeändertes Problem.

Die Grenzlösungen sind eine echte Erweiterung der schwachen Energielösungen.

Eindeutigkeit

schwache Lösungen

Existenz

Schwache Energielösungen

Existenz für nicht-negative
Daten

Existenz von signed
solutions

Konstante Randwerte

Eigenschaften

L^1 Stabilität

Energieeigenschaften

Unsere Schwache Energielösung u erfüllt eine der folgenden Energieabschätzungen

$$\int \int_{Q_T} |\nabla \Phi(u)|^2 dx dt + \int_{\Omega} \Psi(u(x, T)) dx \leq \int_{\Omega} \Psi(u_0(x)) dx + \int \int_{Q_T} f \Phi(u) dx$$

Konsequenzen

- $\Phi(u) \in L^2(0, T : H_0^1(\Omega))$ (Poincaré)
- Schranke von $\Phi(u)$ nur abh. von
 - Norm von u_0 in $L_{\Psi}(\Omega)$
 - Norm von f in $L^p(\Omega_T)$
- $u(t)$ kann in $L^\infty(0, T : L_{\Psi}(\Omega))$ genauso abgeschätzt werden.

Monotonie in der L^p -Norm

Satz

Zusätzlich zu den Annahmen des 2. Existenzsatzes sei $u_0 \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$ und $f = 0$.

Dann ist $u(\cdot, t) \in L^p(\Omega)$, $\forall t > 0$ und

$$\|u(\cdot, t)\|_p \leq \|u_0\|_p$$

Proof.

Der Beweis erfolgt durch Approximation

