

# Blow Ups

Sönke Schmid

Seminar: Nichtlineare Diffusion  
Prof. Burger  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

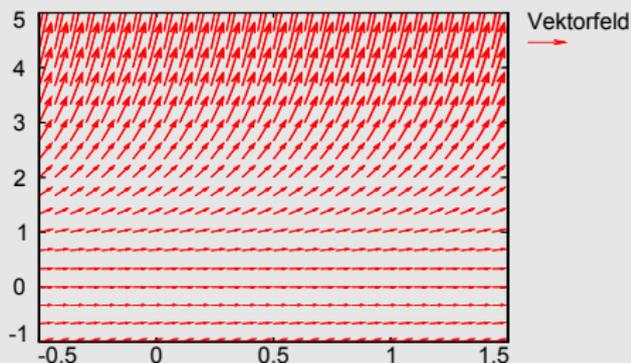
24. November 2008

# Ein erstes anschauliches Beispiel

$$\begin{aligned}u'(t) &= u^2(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0) &= u_0\end{aligned}\tag{1}$$

# Ein erstes anschauliches Beispiel

$$\begin{aligned}u'(t) &= u^2(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0) &= u_0\end{aligned}\tag{1}$$



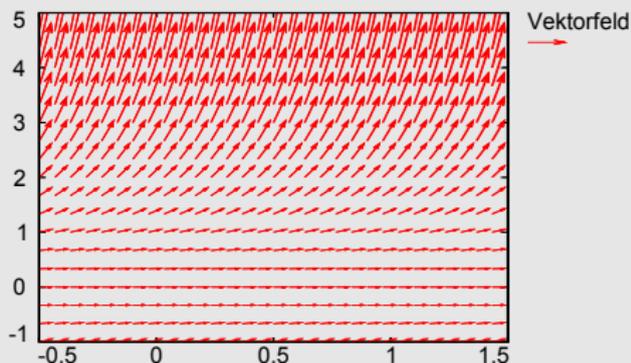
# Ein erstes anschauliches Beispiel

$$u'(t) = u^2(t) \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

$$u(0) = u_0$$

Nichttriviale Lösung der DGL:

$$u(t) = \frac{1}{(T-t)} \quad , \quad T = \frac{1}{u_0} \quad (2)$$



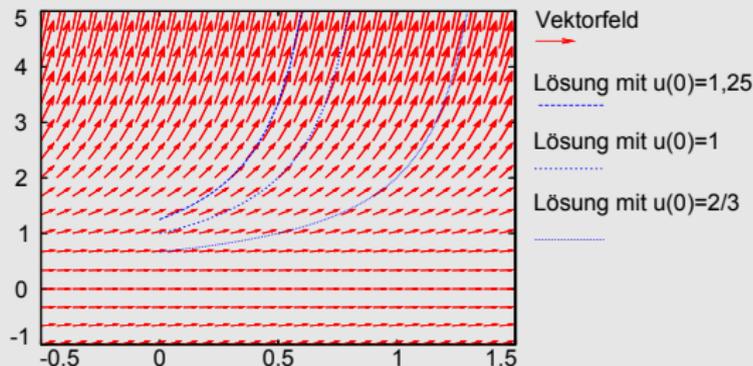
# Ein erstes anschauliches Beispiel

$$u'(t) = u^2(t) \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

$$u(0) = u_0$$

Nichttriviale Lösung der DGL:

$$u(t) = \frac{1}{(T-t)} \quad , \quad T = \frac{1}{u_0} \quad (2)$$



# Motivation

Wärmegleichung beim Entzünden von Festtreibstoff:

$$u_t = \Delta u * \delta e^u \quad (3)$$

$\delta$  Stoffabhängig

# Motivation

Wärmeleichung beim Entzünden von Festtreibstoff:

$$u_t = \Delta u * \delta e^u \quad (3)$$

$\delta$  Stoffabhängig

Vergleich von  $T$  abhängig von  $\Omega$  mit  $Vol(\Omega) = \pi$

- Kugel ( $r = \sqrt{\frac{3}{4}}$ )
- Zylinder ( $r = 1, h = 1$ )
- Würfel ( $a = \sqrt[3]{\pi}$ )

# Motivation

Wärmegleichung beim Entzünden von Festtreibstoff:

$$u_t = \Delta u * \delta e^u \quad (3)$$

$\delta$  Stoffabhängig

Vergleich von  $T$  abhängig von  $\Omega$  mit  $Vol(\Omega) = \pi$

- Kugel ( $r = \sqrt{\frac{3}{4}}$ )
- Zylinder ( $r = 1, h = 1$ )
- Würfel ( $a = \sqrt[3]{\pi}$ )

$\delta$	$T_K$	$T_Z$	$T_W$
4,288	$\infty$	-	-
5,076	1,893	$\infty$	-
5,758	0,848	4.260	$\infty$
20,000	0.095	0.098	0.101

## Wärmegleichung bei chemischen Reaktionen:

$$u_t = \Delta u^m \pm f(u) \quad (4)$$

- $\Delta u^m$  : Nichtlineare Diffusion
- $f(u)$  : exo- bzw endotherme Reaktion

## Wärmegleichung bei chemischen Reaktionen:

$$u_t = \Delta u^m \pm f(u) \quad (4)$$

- $\Delta u^m$  : Nichtlineare Diffusion
- $f(u)$  : exo- bzw endotherme Reaktion

Untersuchen gezielt  $f(u) = u^p$

## Wärmegleichung bei chemischen Reaktionen:

$$u_t = \Delta u^m \pm f(u) \quad (4)$$

- $\Delta u^m$  : Nichtlineare Diffusion
- $f(u)$  : exo- bzw endotherme Reaktion

Untersuchen gezielt  $f(u) = u^p$

## Randbedingungen

- $m > 0$
- $f(u) \geq 0$
- $u(x, 0) = u_0 \geq 0$ , i.d.R. konstant oder glockenförmig

# Inhaltsangabe

Das weitere Vorgehen:

- 1 Zu untersuchende Fragen
- 2 Auftretende Phänomene
- 3 Konstruktion von Lösungen und Fortsetzungen von Blowups
- 4 Klassifikation von Blowups für 1 Dimension ( $x \in \mathbb{R}$ ) mit Beweisen
- 5 Besondere Formen von Blowups : Auslöschung
- 6 Einige Eigenschaften und Ergebnisse für höhere Dimensionen

# Ob? , Wann?

## Ob

Abhängig von

- der Form der Gleichung
- Parametern
- Form und Raum  $\Omega$
- Randbedingungen

# Ob? , Wann?

## Ob

Abhängig von

- der Form der Gleichung
- Parametern
- Form und Raum  $\Omega$
- Randbedingungen

## Wann

Möglichkeiten:

- kein Blowup
- $T = \infty$
- $T \in ]0, \infty[$
- $T = 0$

# Wo: Die Blowupmenge

## Die Blowupmenge $B_T$

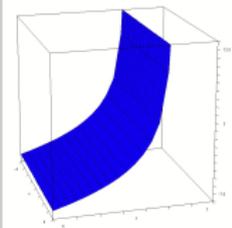
$$B_T := \left\{ x \in \Omega \mid \begin{array}{l} \exists \\ \{x_n, t_n\} \subset \Omega \times ]0, T[ \\ t_n \nearrow T, \quad x_n \rightarrow x \\ u(x_n, t_n) \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (5)$$

# Wo?

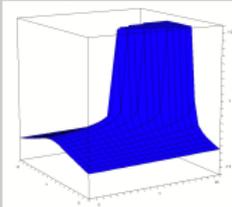
## Wo

Möglichkeiten:

- Global Blowup (HS-Regime)



- Single point Blowup (LS-Regime)



- Regional Blowup (S-Regime)

# Wie?

## Wie

Zu Untersuchen:

- Rate der Divergenz
  - Selbstähnlich
  - Fast Blowup
- Final Time Blowup Profile

# Wie?

## Wie

Zu Untersuchen:

- Rate der Divergenz
  - Selbstähnlich
  - Fast Blowup
- Final Time Blowup Profile

## Final Time Blowup Profile

$$u_T(x) = \lim_{t \rightarrow T} u(x, t)$$

# Konstruieren von "sinnvollen" Fortsetzungen Teil 1

Allg. Ansatz für die Reaktionsgleichungen mit nichtlinearer Diffusion:

$$u_t = \Delta u^m + f(u) \tag{6}$$

f Lipschitzstetig

# Konstruieren von "sinnvollen" Fortsetzungen Teil 1

Allg. Ansatz für die Reaktionsgleichungen mit nichtlinearer Diffusion:

$$u_t = \Delta u^m + f(u) \quad (6)$$

f Lipschitzstetig

Vorgehen:

X Menge von Funktionen  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

X abgeschlossen unter monoton steigender Konvergenz.

X "Menge der zugelassenen Funktionen  $u_t(x)$ "

# Konstruieren von "sinnvollen" Fortsetzungen Teil 1

Allg. Ansatz für die Reaktionsgleichungen mit nichtlinearer Diffusion:

$$u_t = \Delta u^m + f(u) \quad (6)$$

$f$  Lipschitzstetig

Vorgehen:

$X$  Menge von Funktionen  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

$X$  abgeschlossen unter monoton steigender Konvergenz.

$X$  "Menge der zugelassenen Funktionen  $u_t(x)$ "

$B \subset X$  Teilmenge mit angenehmeren Eigenschaften z.B.  $B = L^\infty(\mathbb{R}^n)$   
mit kompaktem Träger

Elemente aus  $X$  können mittels monoton steigender Konvergenz  
durch Elemente aus  $B$  approximiert werden.

## Konstruieren von "sinnvollen" Fortsetzungen Teil 2

$S_t$  Halbgruppe von Operatoren  $S_t : B \rightarrow B$

$S_{t_1}(u_{t_2}(x)) \mapsto u_{t_1+t_2}(x)$  insbesondere  $S_t(u_0(x)) = u(x, t)$

Erweitern von  $S_t : B \rightarrow B$  auf  $T_t : X \rightarrow X$  :

## Konstruieren von "sinnvollen" Fortsetzungen Teil 2

$S_t$  Halbgruppe von Operatoren  $S_t : B \rightarrow B$

$S_{t_1}(u_{t_2}(x)) \mapsto u_{t_1+t_2}(x)$  insbesondere  $S_t(u_0(x)) = u(x, t)$

Erweitern von  $S_t : B \rightarrow B$  auf  $T_t : X \rightarrow X$  :

Nutze geordnete Familie von "Approximationsoperatoren"  $\{P_n\}$

$P_n : X \rightarrow B$

D.h.  $\forall u \in X, m > n \quad P_m(u) > P_n(u)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u) = u$

## Konstruieren von "sinnvollen" Fortsetzungen Teil 2

$S_t$  Halbgruppe von Operatoren  $S_t : B \rightarrow B$

$S_{t_1}(u_{t_2}(x)) \mapsto u_{t_1+t_2}(x)$  insbesondere  $S_t(u_0(x)) = u(x, t)$

Erweitern von  $S_t : B \rightarrow B$  auf  $T_t : X \rightarrow X$  :

Nutze geordnete Familie von "Approximationsoperatoren"  $\{P_n\}$

$P_n : X \rightarrow B$

D.h.  $\forall u \in X, m > n \quad P_m(u) > P_n(u)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u) = u$

Definiere  $T_t(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_t(P_n(u))$

$T_t$  ist wieder eine Halbgruppe.

## Konstruieren von "sinnvollen" Fortsetzungen Teil 3

Erweitern von  $f$  lipschitzstetig auf allgemeinere  $f$ :

Nutze monoton steigende Folge lipschitzstetiger Funktionen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

Seien  $T_t^n$  bzw.  $S_t^n$  die entsprechenden Operatoren für das Problem mit  $f_n$

$$T_t(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_t^n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} S_t^n(P_k(u))$$

## Konstruieren von "sinnvollen" Fortsetzungen Teil 3

Erweitern von  $f$  lipschitzstetig auf allgemeinere  $f$ :

Nutze monoton steigende Folge lipschitzstetiger Funktionen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

Seien  $T_t^n$  bzw.  $S_t^n$  die entsprechenden Operatoren für das Problem mit  $f_n$

$$T_t(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_t^n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} S_t^n(P_k(u))$$

Insbesondere  $u(x, t) = T_t(u_0(x))$

## Eigenschaften dieser Fortsetzungen

Fortsetzungen von Blowups  $u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$  hat folgende Eigenschaften:

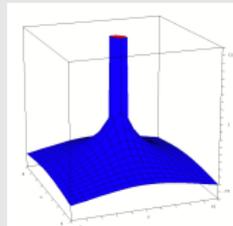
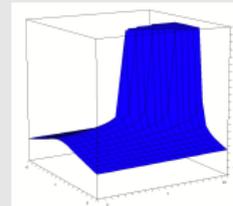
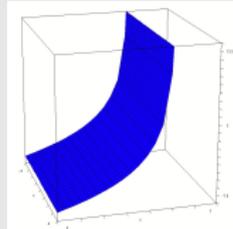
- $u$  unabh. der Approximationen  $f_n$
- für  $t < T$   $u$  entspricht klassischer, bzw. schwacher Lösung
- Falls Lösung für  $t < T$  nicht eindeutig:  $u$  entspricht minimaler, nichtnegativer Lösung

### Neue Definition der Blowup-menge

$$B(t) = \left\{ x \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \infty \right\} \quad (7)$$

## Fortsetzungen von Blowups

- vollständiges Blowup
- unvollständiges Blowup
- vorübergehendes Blowup



# Klassifikation von Blowups für 1 Dimension

## Inhaltsangabe

- 1 Zu untersuchende Fragen
- 2 Auftretende Phänomene
- 3 Konstruktion von Lösungen und Fortsetzungen von Blowups
- 4 Klassifikation von Blowups für 1 Dimension ( $x \in \mathbb{R}$ ) mit Beweisen
- 5 Besondere Formen von Blowups : Auslöschung
- 6 Einige Eigenschaften und Ergebnisse für höhere Dimensionen

# Klassifikation von Blowups bei gewöhnlichen DGL

Gewöhnliche DGLs:

## Osgood-Bedingung (1898):

Ein Blowup tritt bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$u_t = f(u) \tag{8}$$

mit positiven Anfangsbedingungen genau dann auf, wenn  $f(s)$  die Osgood-Bedingung erfüllt:

$$\int_1^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty \tag{9}$$

# Sinnvolle Randbedingungen

Klassifikationsversuch für Blowups bei DGLs in 1 Dimension:

$$u_t = \phi(u)_{xx} + f(u)$$

$$\phi \in C([0, \infty[) \cap C^1(]0, \infty[)$$

$$\phi'(u) > 0 \quad \text{für } u > 0$$

$$\phi(0) = 0$$

$$f(u) \geq 0 \quad \text{für } u > 0$$

$$u_0(x) \geq 0 \quad \text{beschränkt, stetig, } \neq 0$$

# $u_0$ konstant

## $u_0(x)$ konstant

⇒  $u_t(x)$  konstant

⇒ zurückführen auf gewöhnliche DGL:

$u$  hat ein Blowup  $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{ds}{f(u)} < \infty$

# $u_0$ konstant

## $u_0(x)$ konstant

$\Rightarrow u_t(x)$  konstant

$\Rightarrow$  zurückführen auf gewöhnliche DGL:

$u$  hat ein Blowup  $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{ds}{f(u)} < \infty$

interessanter:

## $u_0$ glockenförmig

- $u_0$  besitzt nur ein lokales Maximum.
- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) = 0$

# Bedingungen Teil 1

## B1

Nötig für Blowup, folgt aus Maximumprinzip:

$$\int_1^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty$$

## B2

Relativer Einfluss von Diffusion und Reaktion:

$$F(u) = \frac{1}{u^2} \int_1^u \phi'(s)f(s)ds \quad F(u) \text{ beschränkt für } u \rightarrow \infty$$

## B2'

Verschärfung von B2:  $\frac{\phi'(u)f(u)}{u}$  beschränkt für große  $u$

## Bedingungen Teil 2

**B3**

Endl. Ausbreitungsgeschwindigkeit des Blowups:

$$\int_1^{\infty} \frac{\phi'(s)}{s} ds < \infty$$

# Implikation von B3 durch B1 und B2, Teil 1

## Lemma

B1, B2,  $f$  monoton für große  $u \Rightarrow$  B3

Bew:

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} \frac{\phi'(s)}{s} ds \\ \leq & \int_1^{\infty} \frac{\phi'(1)}{s} \frac{f(s)}{f(1)} ds \\ \leq & \frac{1}{f(1)} \int_1^{\infty} \frac{\phi'(s)f(s)}{s^2} ds < \infty \end{aligned}$$

(10)

## Implikation von B3 durch B1 und B2, Teil 2

### Lemma

Bew:

$B1, B2' \Rightarrow B3$

$$\begin{aligned} & \lim \frac{\phi'(u)f(u)}{u} \rightarrow C \\ \Rightarrow & \lim \frac{\phi'(u)}{u} \rightarrow \lim \frac{C}{f(u)} \\ \Rightarrow & \int \frac{\phi'(u)}{u} ds \quad \text{beschränkt} \end{aligned}$$

(11)

# Lösung mit Hilfe von Wanderwellen

$$0 = \phi(u)_{xx} - u_t + f(u)$$

$$u(x, t) = \theta(\xi) \quad , \quad \xi = x - \lambda t + a$$

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \phi(\theta) + \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} \theta + f(\theta)$$

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \phi(\theta) * \frac{\partial}{\partial \theta} \phi(\theta) + \lambda * \frac{\partial}{\partial \xi} \theta * \frac{\partial}{\partial \theta} \phi(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \phi(\theta) * f(\theta)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) * \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) + \lambda * \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) + G(\theta)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) * \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) + \lambda * \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) + \mathbf{G}(\theta)$$

$$y(\theta) := -\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} y(\theta) * y(\theta) - \lambda y(\theta) + \mathbf{G}(\theta) \tag{12}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) * \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) + \lambda * \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) + \mathbf{G}(\theta)$$

$$y(\theta) := -\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} y(\theta) * y(\theta) - \lambda y(\theta) + \mathbf{G}(\theta) \quad (12)$$

Abschätzung von  $y(\theta)$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} y(\theta) = \frac{\lambda y(\theta)}{y(\theta)} - \frac{\mathbf{G}(\theta)}{y(\theta)} \leq \lambda$$

$$\Rightarrow y(\theta) \leq \lambda \theta + c$$

## B2 und monotone Wanderwellen, Teil1

### Lemma

Es existiert eine monotone Lösung der Form  $\theta(\xi)$   
 $\Leftrightarrow B_2$  ist erfüllt.

Bew: "  $\Rightarrow$  "

$$G(\theta) = \lambda y(\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} y(\theta) + y(\theta)$$

$$\int_1^\theta G(s) ds = \lambda \int_1^\theta y(s) ds - \int_1^\theta \frac{\partial}{\partial s} y(s) * y(s) ds$$

$$\theta^2 F(\theta) \leq \left( \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 + \lambda c \theta \right) - \left( \frac{1}{2} \lambda^2 + \lambda c \right) - \underbrace{(y^2(\theta) - y^2(1))}_{\geq 0}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} F(\theta) \leq \frac{1}{2} \lambda^2 < \infty$$

(13)

## B2 und monotone Wanderwellen, Teil2

”←”

$$\lim F(\theta) < \infty \quad \Rightarrow \quad \exists_{a \in \mathbb{R}} f(\theta) \leq a$$

$$\int_1^\theta \frac{\partial}{\partial s} y(s) * y(s) ds = \lambda \int_1^\theta y(s) ds - \int_1^\theta G(s) ds$$

$$\frac{1}{2} y^2(\theta) \geq \frac{1}{2} (y^2(\theta) - y^2(1)) \geq \lambda \int_1^\theta y(s) ds - a \theta^2$$

## B2 und monotone Wanderwellen, Teil3

$$\frac{1}{2}y^2(\theta) \geq \frac{1}{2}(y^2(\theta) - y^2(1)) \geq \lambda \int_1^\theta y(s)ds - a\theta^2$$

Gesucht  $\mu \in \mathbb{R}$ , sodass wir durch  $\int_1^\theta y(s)ds = \mu\theta^2$  eine untere Lösung  
SSubsolution erhalten:

$$2\mu^2\theta^2 \leq \lambda\mu\theta^2 - a\theta^2 \Leftrightarrow \mu \leq \sqrt{\frac{1}{16}\lambda^2 - \frac{a}{2}} + \frac{\lambda}{4}$$

$$\Rightarrow y^2(\theta) \geq 4\mu^2\theta^2 > 0$$

$$\Rightarrow |y(\theta)| = | - \underbrace{\phi'(\theta)}_{>0} * \theta' | > 0 \Rightarrow \theta \text{ monoton}$$

## Theorem: unvollständiger Blowup

Sind die bisherigen Bedingungen für  $\phi$ ,  $f$  und  $u_0$  gegeben,  $B(T) \neq \emptyset$  und die Bedingungen B2, B3 erfüllt, dann kann  $u(x, t)$  für  $t > T$  beliebig lange fortgesetzt werden.

## Theorem: vollständiger Blowup

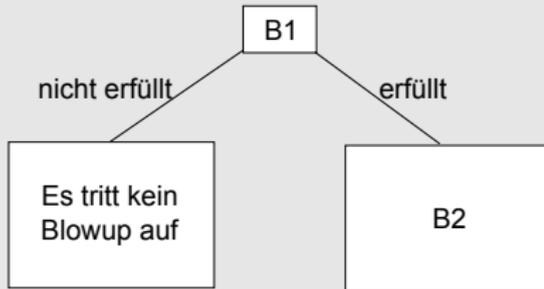
Sind die bisherigen Bedingungen für  $\phi$ ,  $f$  und  $u_0$  gegeben,  $\text{supp}(u_0)$  kompakt,  $B(T) \neq \emptyset$  und die Bedingung B2 nicht erfüllt, dann gilt

$$\forall_{t > T} u \equiv \infty.$$

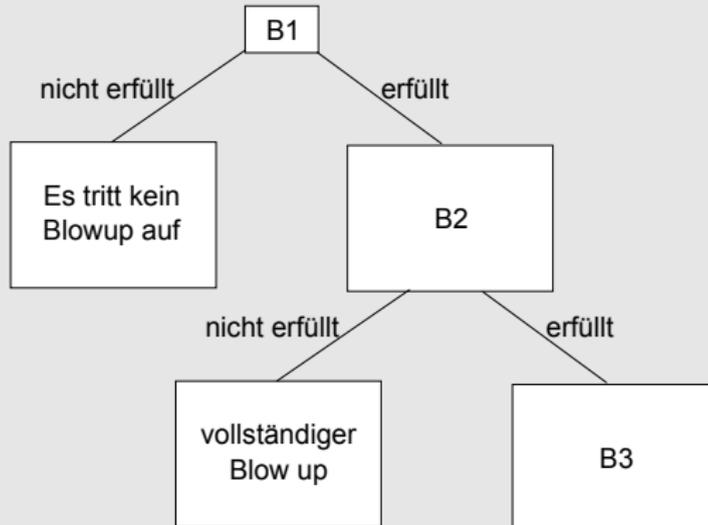
# Bisherige Zusammenfassung

B1

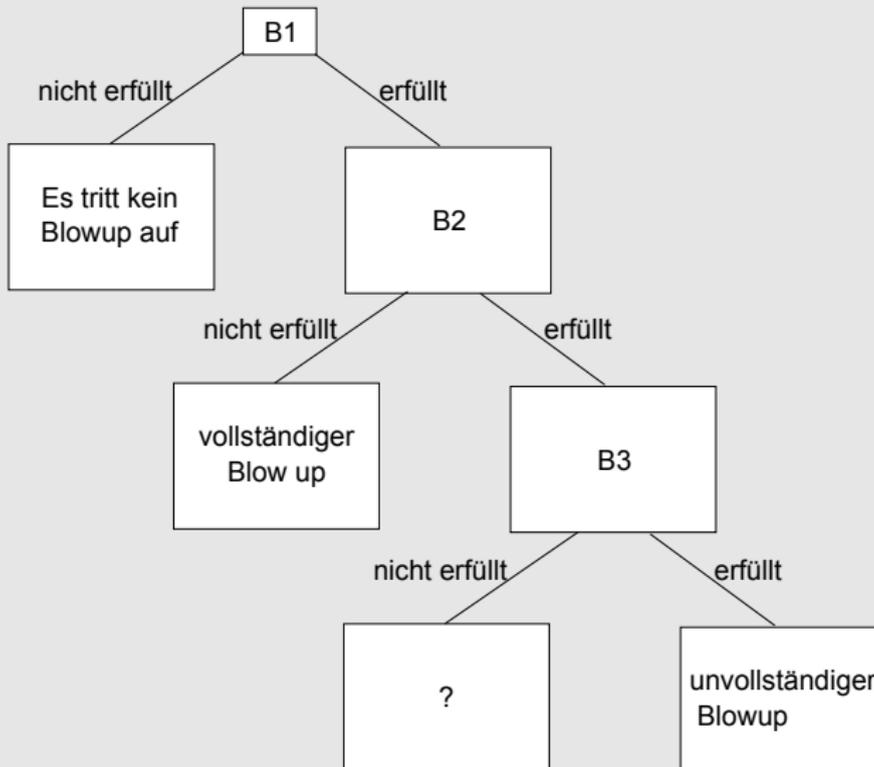
# Bisherige Zusammenfassung



# Bisherige Zusammenfassung



# Bisherige Zusammenfassung



## Pathologische Klasse

Es existieren Funktionen, die B1 und B2 erfüllen, aber nicht B3.

Diese Funktionen sind konstruiert und treten bisher nicht in der Literatur auf.

Diese Funktionen können aber seltsame Eigenschaften haben:

Es gibt eine Klasse von Funktion, die B1 und B2 erfüllt, nicht aber B3 und die folgende Bedingung erfüllen:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\theta) = 0$$

Dann gilt für:

- $u_0$  konstant:  
Es kommt zu einem Blowup.
- $u_0$  glockenförmig mit  $\text{Supp}(u_0)$  Kompakt.  
Es gibt globale Lösungen für  $u$ .

# Blowups in 1D für bekannte Gleichungen

$$u_t = (u^m)_{xx} + u^p$$

- Blowup kann nur bei  $p > 1$  auftreten
- Incomplete Blowup  $\Leftrightarrow p + m \leq 2$  und  $p > 1$

## Gleichung mit p-Laplace Operator

$$u_t = (|u_x|^\sigma u_x)_x + u^p$$

Mit  $\sigma > -1$ ,  $p > 1$  hat vollständige Blowup

$$\Leftrightarrow p > \frac{1}{\sigma+1}$$

# Auslöschung

## Inhaltsangabe

- 1 Zu untersuchende Fragen
- 2 Auftretende Phänomene
- 3 Konstruktion von Lösungen und Fortsetzungen von Blowups
- 4 Klassifikation von Blowups für 1 Dimension ( $x \in \mathbb{R}$ ) mit Beweisen
- 5 Besondere Formen von Blowups : Auslöschung
- 6 Einige Eigenschaften und Ergebnisse für höhere Dimensionen

# Reaktionsgleichung mit Absorption

## Reaktionsgleichung mit Absorption

$$u_t = (\phi(u))_{xx} - f(u) \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \quad (14)$$

Mit ähnlichen Voraussetzungen:

- $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f \in C^1(0, \infty)$
- $f$  nicht zwangsweise stetig in  $u = 0$
- $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $0 < c < u_0 < C$
- $u_0$  invers Glockenförmig

- $f(u)$  stetig in 0
- starke Absorption:  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} \rightarrow \infty$

$u$  strikt positiv für  $0 < t < T$

$$A_1 \quad \lim_{t \rightarrow T} \inf_{x \in \mathbb{R}} u(x, t) \rightarrow 0 \quad (15)$$

- $f(u)$  stetig in 0
- starke Absorption:  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} \rightarrow \infty$

$u$  strikt positiv für  $0 < t < T$

$$A_1 \quad \lim_{t \rightarrow T} \inf_{x \in \mathbb{R}} u(x, t) \rightarrow 0 \quad (15)$$

$u$  kann im schwachen Sinne für  $t > T$  fortgesetzt werden. Dort tritt eine Tote Zone (Dead Core, Depleted Zone) auf:

## Tote Zone

$$A(t) = \{x \mid u(x, t) = 0\} \quad (16)$$

Es können auch bei Auslöschung verschiedene Phänomene auftreten:

- vollständige Auslöschung  $A(T) = \mathbb{R}$
- unvollständige Auslöschung  $A(T) \neq \mathbb{R}$

Es können auch bei Auslöschung verschiedene Phänomene auftreten:

- vollständige Auslöschung  $A(T) = \mathbb{R}$
- unvollständige Auslöschung  $A(T) \neq \mathbb{R}$

## Untersuchung mittels der Methoden für Blowups

Auslöschung lässt sich mittels Übergang  $u \rightarrow \frac{1}{u}$  auf Blowups zurückführen

Es können auch bei Auslöschung verschiedene Phänomene auftreten:

- vollständige Auslöschung  $A(T) = \mathbb{R}$
- unvollständige Auslöschung  $A(T) \neq \mathbb{R}$

## Untersuchung mittels der Methoden für Blowups

Auslöschung lässt sich mittels Übergang  $u \rightarrow \frac{1}{v}$  auf Blowups zurückführen

⇒ kompliziertere Gleichungen, schwerer zu untersuchen:

$$u_t = (\phi(u))_{xx} - f(u)$$

$$\xrightarrow{u=\frac{1}{v}} v_t = \phi' \left( \frac{1}{v} \right) v_{xx} + v^2 \left( \phi' \left( \frac{1}{v} \right) v^{-2} \right)' (v_x)^2 + v^2 f \left( \frac{1}{v} \right)$$

## Direkte Untersuchung von Auslöschung

 $A_2$ 

$$\int_0^1 \phi'(s)f(s)ds < \infty \quad (17)$$

### Theorem

Voraussetzung  $A_1$  erfüllt:

- 1  $A(T) \neq \emptyset$  und  $A_2$  nicht erfüllt  $\Rightarrow u \equiv 0$  für  $t > T$
- 2 Falls  $E \neq \mathbb{R}$  und  $A_2$  erfüllt  $\Rightarrow u$  hat nichttriviale Fortsetzung für  $t > T$

Beweis läuft sehr analog zum Vorgehen bei Blowups.

# Ergebnisse in höheren Dimensionen

## Inhaltsangabe

- 1 Zu untersuchende Fragen
- 2 Auftretende Phänomene
- 3 Konstruktion von Lösungen und Fortsetzungen von Blowups
- 4 Klassifikation von Blowups für 1 Dimension ( $x \in \mathbb{R}$ ) mit Beweisen
- 5 Besondere Formen von Blowups : Auslöschung
- 6 Einige Eigenschaften und Ergebnisse für höhere Dimensionen

Rettung einiger Ergebnisse aus dem Fall 1D in mehrere Dimensionen:

## Theorem

Für  $u_t = \Delta\phi(u) + f(u)$

$\phi'(u) > 0$

$f(u)$  für  $u > 0$

$\phi(0) = f(0) = 0$

$u_0 \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$

$\phi$  und  $f$  erfüllen die Bedingungen  $B_1, B_2, B_3$

$\Rightarrow u$  kann in einem Rechteck  $I \times [T, T + \delta]$  fortgesetzt werden.

Rettung einiger Ergebnisse aus dem Fall 1D in mehrere Dimensionen:

## Theorem

Für  $u_t = \Delta\phi(u) + f(u)$

$\phi'(u) > 0$

$f(u)$  für  $u > 0$

$\phi(0) = f(0) = 0$

$u_0 \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$

$\phi$  und  $f$  erfüllen die Bedingungen  $B_1, B_2, B_3$

$\Rightarrow u$  kann in einem Rechteck  $I \times [T, T + \delta]$  fortgesetzt werden.

Bew: Analog zum Fall für eine Dimension, "verbreitern" Wanderwelle konstant in andere Dimensionen zu einer Wellenfront"

Rettung einiger Ergebnisse aus dem Fall 1D in mehrere Dimensionen:

## Theorem

Für  $u_t = \Delta \phi(u) + f(u)$

$\phi'(u) > 0$

$f(u)$  für  $u > 0$

$\phi(0) = f(0) = 0$

$u_0 \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$

$\phi$  und  $f$  erfüllen die Bedingungen  $B_1, B_2, B_3$

$\Rightarrow u$  kann in einem Rechteck  $I \times [T, T + \delta]$  fortgesetzt werden.

Bew: Analog zum Fall für eine Dimension, "verbreitern" Wanderwelle konstant in andere Dimensionen zu einer Wellenfront"

Die Bedingungen  $B_1, B_2, B_3$  sind erfüllt für  $p > 1$  und  $p + m \leq 2$

Sehr gut kann man dies für den Grenzfall  $p+m=2$  sehen: Für die Gleichung gibt es dann eine explizite Wanderwellenlösung:

$$V(x, t) = \left( C ((x * \mathbf{n}) - \lambda t + a)_+ \right)^{-\frac{1}{1-m}}$$

mit

$$C = \frac{1-m}{2m} (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4m})$$

Sehr gut kann man dies für den Grenzfall  $p+m=2$  sehen: Für die Gleichung gibt es dann eine explizite Wanderwellenlösung:

$$V(x, t) = \left( C \left( (x * \mathbf{n}) - \lambda t + a \right)_+ \right)^{-\frac{1}{1-m}}$$

mit

$$C = \frac{1-m}{2m} \left( \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4m} \right)$$

$\Rightarrow \lambda_m = 2\sqrt{m}$  ist die minimale Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $B(T)$  vom Nullpunkt aus.

$$\Rightarrow \text{diam}(B(t)) \leq 4\sqrt{m}(t + c)$$

## Complete Blowup im mehrdimensionalen Fall

Nicht auf eine Dimension zurückzuführen: Die Gleichung  $u_t = \Delta u^m + u^p$  erlaubt keine Glockenförmigen Wanderwellen in mehreren Dimensionen.

## Complete Blowup im mehrdimensionalen Fall

Nicht auf eine Dimension zurückzuführen: Die Gleichung  $u_t = \Delta u^m + u^p$  erlaubt keine Glockenförmigen Wanderwellen in mehreren Dimensionen.

Sei  $U(r; \varepsilon)$  die Lösung des Problems

$$\left( \frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-1} U^m)' \right)' + U^p = 0$$

$$r > 0 \quad , \quad U(0) = \varepsilon \quad , \quad U'(0) = 0$$

## Complete Blowup im mehrdimensionalen Fall

Nicht auf eine Dimension zurückzuführen: Die Gleichung  $u_t = \Delta u^m + u^p$  erlaubt keine Glockenförmigen Wanderwellen in mehreren Dimensionen.

Sei  $U(r; \varepsilon)$  die Lösung des Problems

$$\left( \frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-1} U^m)' \right)' + U^p = 0$$

$$r > 0 \quad , \quad U(0) = \varepsilon \quad , \quad U'(0) = 0$$

### Mantel von $U(r; \varepsilon)$

$$\mathcal{L}(r) = \sup_{\varepsilon > 0} U(r; \varepsilon)$$

## Eigenschaften von $\mathcal{L}(r)$

- $\mathcal{L}(r) \equiv \infty$  für  $p < m$
- $\mathcal{L}(r) = \infty$  für  $p = m$ ,  $0 \leq r < r_*$  ( $r_* > 0$  genügt  $U(r_*; 1) = 0$ )
- $\mathcal{L}(r) = c_* r^{-\frac{2}{(p-m)}}$  für  $p > m$  mit  $c_* = c_*(m, p, n) > 0$

## Eigenschaften von $\mathcal{L}(r)$

- $\mathcal{L}(r) \equiv \infty$  für  $p < m$
- $\mathcal{L}(r) = \infty$  für  $p = m$ ,  $0 \leq r < r_*$  ( $r_* > 0$  genügt  $U(r_*; 1) = 0$ )
- $\mathcal{L}(r) = c_* r^{-\frac{2}{(p-m)}}$  für  $p > m$  mit  $c_* = c_*(m, p, n) > 0$

## Der kritische Sobolev-Exponent $p_s$

$$p_s = m \frac{(n+2)}{(n-2)} \text{ für } n \geq 3$$

Für  $1 < p < p_s$  und  $u(r, t)$  radialsymmetrisch, monoton fallend für  $r > 0$

$$\Rightarrow \forall_{\varepsilon > 1, t \in [T-\delta, T[} u(r, t) > U(r; \varepsilon)$$

## Eigenschaften von $\mathcal{L}(r)$

- $\mathcal{L}(r) \equiv \infty$  für  $p < m$
- $\mathcal{L}(r) = \infty$  für  $p = m$ ,  $0 \leq r < r_*$  ( $r_* > 0$  genügt  $U(r_*; 1) = 0$ )
- $\mathcal{L}(r) = c_* r^{-\frac{2}{(p-m)}}$  für  $p > m$  mit  $c_* = c_*(m, p, n) > 0$

## Der kritische Sobolev-Exponent $p_s$

$$p_s = m \frac{(n+2)}{(n-2)} \text{ für } n \geq 3$$

Für  $1 < p < p_s$  und  $u(r, t)$  radialsymmetrisch, monoton fallend für  $r > 0$

$$\Rightarrow \forall_{\varepsilon > 1, t \in [T-\delta, T[} u(r, t) > U(r; \varepsilon)$$

Durch Übergang  $\varepsilon \rightarrow \infty$ :

- vollständiger Blowup für  $p < m$
- mindestens regionaler Blowup für  $p = m$

# Peaking Solutions

## Theorem

Es existiert ein  $p_p > p_s$  sodass für  $p_s < p < p_p$  Lösungen existieren, die für  $T > 0$  ein Blowup haben und zu allen anderen Zeiten beschränkt sind.

$$p_p(m, n) = 1 + \frac{3m + ((m-1)^2(n-10)^2 + 2(m-1)(5m-4(n-10)+9m^2))^{\frac{1}{2}}}{(n-10)_+}$$

## Ein Beispiel

$$u(r, t) = \begin{cases} (T - t)^{-\frac{1}{\rho-1}} \theta\left(\frac{r}{(T-t)^\beta}\right) & t < T \\ (t - T)^{-\frac{1}{\rho-1}} \theta\left(\frac{r}{(t-T)^\beta}\right) & T < t \end{cases}$$

Wobei  $\beta = \frac{\rho-m}{2(\rho-1)} > 0$

## Ein Beispiel

$$u(r, t) = \begin{cases} (T - t)^{-\frac{1}{\rho-1}} \theta\left(\frac{r}{(T-t)^\beta}\right) & t < T \\ (t - T)^{-\frac{1}{\rho-1}} \theta\left(\frac{r}{(t-T)^\beta}\right) & T < t \end{cases}$$

Wobei  $\beta = \frac{\rho-m}{2(\rho-1)} > 0$

Für  $m = 1$ ,  $\rho = 2$ ,  $6 < n < 16$  gibt es eine Explizite Lösung für  $\theta$ :

$$\theta(\eta) = \frac{A}{(a+\eta^2)^2} + \frac{B}{a+\eta^2} \text{ mit:}$$

$$a = 2(10D - (n + 14)),$$

$$A = 24a$$

$$B = 24(D - 2) > 0$$

$$D = \left(\frac{1+n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

# Der stationäre Exponent

Für  $n \geq 3$  und  $p > p_{st}$  gibt es eine stationäre Lösung für das radialsymmetrische Problem:

$$U_s(r) = c_s r^{-\frac{2}{p-m}} \quad (18)$$

$$c_s(p, m, n) = \left( \frac{2m}{p-m} \left( N - 2 - \frac{2m}{p-m} \right) \right)^{-\frac{1}{p-m}} \quad (19)$$

$$p_{st} = m + \frac{2}{n} \quad (20)$$

# Der Fujita-Exponent $p_f$

## Fujita-Exponent

Für die Gleichung  $u_t = \Delta u^m + u^p$  ist

$$p_f = m + \frac{2}{n} \tag{21}$$

# Der Fujita-Exponent $p_f$

## Fujita-Exponent

Für die Gleichung  $u_t = \Delta u^m + u^p$  ist

$$p_f = m + \frac{2}{n} \quad (21)$$

Für  $1 < p < p_f$  Alle Lösungen ( $u \not\equiv 0$ ) haben ein Blowup in  $T < \infty$

Für  $p > p_f$  Blowup abhängig von  $u_0$ :

$u_0$  groß: Blowup in  $T < \infty$

$u_0$  klein: Lösung ist global definiert.

# Der Fujita-Exponent $p_f$

## Fujita-Exponent

Für die Gleichung  $u_t = \Delta u^m + u^p$  ist

$$p_f = m + \frac{2}{n} \quad (21)$$

Für  $1 < p < p_f$  Alle Lösungen ( $u \not\equiv 0$ ) haben ein Blowup in  $T < \infty$

Für  $p > p_f$  Blowup abhängig von  $u_0$ :

$u_0$  groß: Blowup in  $T < \infty$

$u_0$  klein: Lösung ist global definiert.

$p_f$  ist für viele Gleichungen bekannt:

$$u_t = \nabla(|\nabla u|^\sigma \nabla u) + u^p$$

$$p_f = 1 + \sigma + \frac{\sigma + 2}{n}$$

Vielen Dank für Eure  
Aufmerksamkeit!

- **The Problem of Blow-up in nonlinear parabolic Equations**, Victor A. Galaktionov und Juan L. Vazquez,
- **Mathematical Problems from Combustion Theory**, J. Bebernes und D. Eberly, Appl. Math. Sci Vol. 83, Springer Verlag 1989
- **Continuation of Blowup Solutions of Nonlinear Heat Equations in Several Space Dimensions**, Victor A. Galaktionov und Juan L. Vazquez, Comm. on Pure and App. Math. Vol. L, 1997
- **Necessary and Sufficient Conditions for Complete Blowup and Extinction for One-Dimensional Quasilinear Heat Equations**, Victor A. Galaktionov und Juan L. Vazquez, Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 129 S.225-244, Springer-Verlag 1995