Langzeitverhalten 2

Johannes Vorwerk

Seminar Nichtlineare Diffusion

Letzte Woche

- Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Gleichgewichtslösung für die nichtlineare Fokker-Planck-Gleichung
- Abschätzung des Abfalls der Entropie für die lineare Fokker-Planck-Gleichung
- Abschätzung des Abfalls der Entropie für einige Beispiele

Heute

- Abschätzung des Abfalls der Entropie für Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung
- Herstellung eines Zusammenhangs zwischen der relativen Entropie und des L^1-Abstandes der Funktionen

Programm

1. Berechnung des Abfalls der Entropie
   - Beschränktes Ω
   - Verallgemeinerte Sobolev-Ungleichungen, $\Omega = \mathbb{R}^d$
   - Existenz einer Lösung und exponentieller Abfall der Entropie, $\Omega = \mathbb{R}^d$
2. Eine Csiszár-Kullback-artige Ungleichung
   - Einige Eigenschaften der relativen Entropie $E(.|.)$
   - Eine Csiszár-Kullback Ungleichung für $E(.|u_\infty)$

Wir betrachten die nichtlineare Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(u\nabla V(x) + \nabla f(u)), (x \in \Omega, t > 0) \quad (1)$$

mit Startbedingung

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \geq 0, (x \in \Omega) \quad (2)$$

und Randbedingung

$$u\frac{\partial V(x)}{\partial n} + \frac{\partial f(u)}{\partial n} = 0, (x \in \partial\Omega, t > 0) \quad (3)$$

Weitere Voraussetzungen:

(HD1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ist entweder glattes, beschränktes Gebiet oder $\Omega = \mathbb{R}^d$.

(HD2) $u_0 \in L^1(\Omega), u_0 \geq 0$ und $\int_\Omega u_0(x)dx =: M \in (0, \infty)$.

Weitere Voraussetzungen:

- (HD1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ist entweder glattes, beschränktes Gebiet oder $\Omega = \mathbb{R}^d$.
- (HD2) $u_0 \in L^1(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ und $\int_\Omega u_0(x)dx =: M \in (0, \infty)$.
- (HV1) Falls $\Omega = \mathbb{R}^d$, sei $V \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ und falls Ω beschränkt, sei $V \in W^{1,1}(\Omega)$.
- (HV2) Falls $\Omega = \mathbb{R}^d$, sei $\forall A \in \mathbb{R} : \{x | V(x) \leq A\}$ beschränkt.
- (HV3) $\inf_\Omega V = 0$.

Weitere Voraussetzungen:

(HD1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ist entweder glattes, beschränktes Gebiet oder $\Omega = \mathbb{R}^d$.

(HD2) $u_0 \in L^1(\Omega), u_0 \geq 0$ und $\int_\Omega u_0(x)dx =: M \in (0, \infty)$.

(HV1) Falls $\Omega = \mathbb{R}^d$, sei $V \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ und falls Ω beschränkt, sei $V \in W^{1,1}(\Omega)$.

(HV2) Falls $\Omega = \mathbb{R}^d$, sei $\forall A \in \mathbb{R} : \{x | V(x) \leq A\}$ beschränkt.

(HV3) $\inf_\Omega V = 0$.

(HF1) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und $f(0) = 0$.

(HF2) $f|_{\mathbb{R}^+} \in C^3(\mathbb{R}^+)$.

(HF3)
$$h(u) := \int_1^u \frac{f'(u)}{s} ds, u \in (0, \infty)$$
ist aus $L^1_{loc}([0, \infty))$. Dann ist
$$\Phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \Phi(u) = \int_0^u h(s)ds$$
wohldefiniert mit $\Phi'(u) = h(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^+$.

Ziel

Nutzung der "entropy dissipation (production) method" um exponentiellen Abfall der Liapunov relativen Entropie

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) = E(u(t)) - E(u_{\infty,M}), \text{ für } t \to \infty$$

zu beweisen.

Strategie

- Zunächst nimmt man glatte Lösungen für eine angemessen veränderte Ausgangslage (u_0 und f müssen geglättet werden) an.

Strategie

- Zunächst nimmt man glatte Lösungen für eine angemessen veränderte Ausgangslage (u_0 und f müssen geglättet werden) an.
- Dann ist die relative Entropie $RE(u(t)|u_{\infty,M})$ (zweimal) nach der Zeit differenzierbar.

Strategie

- Zunächst nimmt man glatte Lösungen für eine angemessen veränderte Ausgangslage (u_0 und f müssen geglättet werden) an.
- Dann ist die relative Entropie $RE(u(t)|u_{\infty,M})$ (zweimal) nach der Zeit differenzierbar.
- Der entscheidende Schritt ist, den exponentiellen Abfall der Entropie-Produktion

$$I(u(t)) := -\frac{d}{dt}(RE(u(t)|u_{\infty,M}))$$

zu beweisen, woraus der exponentielle Abfall der relativen Entropie einfach gefolgert werden kann.

Strategie

- Zunächst nimmt man glatte Lösungen für eine angemessen veränderte Ausgangslage (u_0 und f müssen geglättet werden) an.
- Dann ist die relative Entropie $RE(u(t)|u_{\infty,M})$ (zweimal) nach der Zeit differenzierbar.
- Der entscheidende Schritt ist, den exponentiellen Abfall der Entropie-Produktion

$$I(u(t)) := -\frac{d}{dt}(RE(u(t)|u_{\infty,M}))$$

  zu beweisen, woraus der exponentielle Abfall der relativen Entropie einfach gefolgert werden kann.
- Nun wird die Lösung u des ursprünglichen Systems durch Lösungen u_ϵ von angemessen definierten geglätteten Systemen approximiert.

Strategie

- Zunächst nimmt man glatte Lösungen für eine angemessen veränderte Ausgangslage (u_0 und f müssen geglättet werden) an.
- Dann ist die relative Entropie $RE(u(t)|u_{\infty,M})$ (zweimal) nach der Zeit differenzierbar.
- Der entscheidende Schritt ist, den exponentiellen Abfall der Entropie-Produktion

$$I(u(t)) := -\frac{d}{dt}(RE(u(t)|u_{\infty,M}))$$

  zu beweisen, woraus der exponentielle Abfall der relativen Entropie einfach gefolgert werden kann.
- Nun wird die Lösung u des ursprünglichen Systems durch Lösungen u_ϵ von angemessen definierten geglätteten Systemen approximiert.
- Problematisch ist, dass man im Limes $\epsilon = 0$ die Differenzierbarkeit der relativen Entropie verlieren könnte.

Zunächst einige weitere Voraussetzungen:

(HV7) Ω ist konvex.

Zunächst einige weitere Voraussetzungen:

(HV7) Ω ist konvex.

(HV8) $V = W|_{\Omega}$, wobei $W \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ gleichmäßig konvex sei, d.h., es gibt $\alpha_1 > 0$, so dass

$$\xi \cdot Hess(W(x)) \cdot \xi^T \geq \alpha_1 |\xi|^2 \tag{4}$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$.

Zunächst einige weitere Voraussetzungen:

(HV7) Ω ist konvex.

(HV8) $V = W|_\Omega$, wobei $W \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ gleichmäßig konvex sei, d.h., es gibt $\alpha_1 > 0$, so dass

$$\xi \cdot Hess(W(x)) \cdot \xi^T \geq \alpha_1 |\xi|^2 \tag{4}$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$.

(HF4) $f(u) \leq \frac{d}{d-1} u f'(u)$, für alle $u > 0$.

Zudem führen wir den "verallgemeinerten Bruch" frac ein

$$\text{frac} : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \text{frac}\{w : z\} = \begin{cases} w/z, z \neq 0 \\ 0, w = z = 0 \\ \infty, w \neq 0, z = 0 \end{cases}$$

Für die spätere Verwendung definieren wir

Definition

Vorausgesetzt (HD1), (HV1). Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sei

$$K_f : L^1_+(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

$$K_f(u) = \begin{cases} \int_\Omega \text{frac}\left\{|(u\nabla V + \nabla f(u))(s)|^2 : u(x)\right\} dx, u \in \mathcal{D}_f \\ \infty, sonst \end{cases}$$

wobei

$$\mathcal{D}_f := \{u \in L^1_+(\Omega) : f(u) \in L^1_{loc}(\Omega), \nabla f(u) \in L^1_{loc}(\Omega : \mathbb{R}^d)\}$$

Definition

Vorausgesetzt (HD1), (HV1). Sei $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sei

$$J_h : L^1_+(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$J_h(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{u>0} \left(u|\nabla V + \nabla h(u))|^2\right)(x)dx, u \in \mathcal{D}_h \\ \infty, sonst \end{cases}$$

Definition

Vorausgesetzt (HD1), (HV1). Sei $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sei

$$J_h : L^1_+(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$J_h(u) = \begin{cases} \int_{u>0} \left(u|\nabla V + \nabla h(u))|^2\right)(x)dx, u \in \mathcal{D}_h \\ \infty, sonst \end{cases}$$

Definition

Vorausgesetzt (HD1), (HF1)-(HF3). Sei $V : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und nicht-negativ. Wir definieren

$$E : L^1_+(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$E(u) = \begin{cases} \int_\Omega (Vu + \Phi^+(u))(x)dx - \int_\Omega \Phi^-(u(x))dx; \Phi^-(u) \in L^1(\Omega) \\ \infty, sonst \end{cases}$$

Theorem

Seien (HD1), (HD2), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF4) mit beschränktem Ω vorausgesetzt und sei weiter u eine schwache Lösung der nichtlinearen Fokker-Planck-Gleichung mit Rand- und Startbedingung. Sei weiter vorausgesetzt

(A0) *Für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ gelte $\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} = M$.*

Theorem

Seien (HD1), (HD2), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF4) mit beschränktem Ω vorausgesetzt und sei weiter u eine schwache Lösung der nichtlinearen Fokker-Planck-Gleichung mit Rand- und Startbedingung. Sei weiter vorausgesetzt

(A0) *Für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ gelte $\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} = M$.*

(A1) $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ *für alle $T > 0$, wobei $Q_T := (0, T) \times \Omega$.*

Theorem

Seien (HD1), (HD2), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF4) mit beschränktem Ω vorausgesetzt und sei weiter u eine schwache Lösung der nichtlinearen Fokker-Planck-Gleichung mit Rand- und Startbedingung. Sei weiter vorausgesetzt

(A0) *Für alle* $t \in \mathbb{R}_0^+$ *gelte* $\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} = M$.

(A1) $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ *für alle* $T > 0$, *wobei* $Q_T := (0, T) \times \Omega$.

(A2) *Es gibt* $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$ *mit* $u_0 \geq \rho_0$.

Theorem

Seien (HD1), (HD2), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF4) mit beschränktem Ω vorausgesetzt und sei weiter u eine schwache Lösung der nichtlinearen Fokker-Planck-Gleichung mit Rand- und Startbedingung. Sei weiter vorausgesetzt

- (A0) *Für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ gelte $\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} = M$.*
- (A1) $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ *für alle $T > 0$, wobei $Q_T := (0, T) \times \Omega$.*
- (A2) *Es gibt $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $u_0 \geq \rho_0$.*
- (A3) *Es gibt $K \in \mathbb{R}^+$, so dass $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$.*

Theorem

Seien (HD1), (HD2), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF4) mit beschränktem Ω vorausgesetzt und sei weiter u eine schwache Lösung der nichtlinearen Fokker-Planck-Gleichung mit Rand- und Startbedingung. Sei weiter vorausgesetzt

- (A0) *Für alle* $t \in \mathbb{R}_0^+$ *gelte* $\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} = M$.
- (A1) $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ *für alle* $T > 0$, *wobei* $Q_T := (0, T) \times \Omega$.
- (A2) *Es gibt* $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$ *mit* $u_0 \geq \rho_0$.
- (A3) *Es gibt* $K \in \mathbb{R}^+$, *so dass* $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_0^+$.
- (A4) $h(0+) = -\infty$

Theorem

Seien (HD1), (HD2), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF4) mit beschränktem Ω vorausgesetzt und sei weiter u eine schwache Lösung der nichtlinearen Fokker-Planck-Gleichung mit Rand- und Startbedingung. Sei weiter vorausgesetzt

- (A0) *Für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ gelte $\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} = M$.*
- (A1) $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ *für alle $T > 0$, wobei $Q_T := (0, T) \times \Omega$.*
- (A2) *Es gibt $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $u_0 \geq \rho_0$.*
- (A3) *Es gibt $K \in \mathbb{R}^+$, so dass $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$.*
- (A4) $h(0+) = -\infty$
- (A5) *Jede Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^{1,2}(\overline{Q_T})$ von Lösungen von(1), (3) die gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(Q_T)$ ist, besitzt eine Teilfolge $(u_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $\{u_{\nu(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig ist.*

Theorem

Dann gilt:

a) *Die Funktionen* $t \mapsto RE(u(t)|u_{\infty,M})$ *und* $t \mapsto E(u(t))$ *sind in* $C^2(\mathbb{R}_0^+)$ *und es gilt*

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u(t_0)|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1(t-t_0)}, t \geq t_0 \geq 0$$

Theorem

Dann gilt:

a) *Die Funktionen $t \mapsto RE(u(t)|u_{\infty,M})$ und $t \mapsto E(u(t))$ sind in $C^2(\mathbb{R}_0^+)$ und es gilt*

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u(t_0)|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1(t-t_0)}, t \geq t_0 \geq 0$$

b) *Die Entropie-Produktion*

$$I(u(t)) := -\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\frac{d}{dt}RE(u(t)|u_{\infty,M})$$

erfüllt

$$I(u(t)) \leq I(u(t_0))e^{-2\alpha_1(t-t_0)}$$

Theorem

Dann gilt:

a) *Die Funktionen* $t \mapsto RE(u(t)|u_{\infty,M})$ *und* $t \mapsto E(u(t))$ *sind in* $C^2(\mathbb{R}_0^+)$ *und es gilt*

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u(t_0)|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1(t-t_0)}, t \geq t_0 \geq 0$$

b) *Die Entropie-Produktion*

$$I(u(t)) := -\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\frac{d}{dt}RE(u(t)|u_{\infty,M})$$

erfüllt

$$I(u(t)) \leq I(u(t_0))e^{-2\alpha_1(t-t_0)}$$

c) $RE(u(t)|u_{\infty,M}$ *und* $I(u(t))$ *sind verknüpft durch*

$$0 \leq RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq \frac{1}{2\alpha_1}I(u(t)), t \geq 0$$

Einschub - schwache Lösung

Definition

Seien (HD1), (HD2), (HV1)-(HV3), (HF1)-(HF3) vorausgesetzt.
$u : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine schwache Lösung genau dann, wenn

1. $u \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ für alle $T > 0$.
2. Falls $\Omega = \mathbb{R}^d$, so gelte $\nabla F(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t : \mathbb{R}^d)$ und falls Ω beschränkt, so gelte $(\nabla f(u))|_{\Omega \times (0,t)} \in L^1(\Omega \times (0, t) : \mathbb{R}^d)$ für alle $T \in \mathbb{R}^+$.
3. Für alle Testfunktionen $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t)$, für die gilt $supp(\phi) \cap (\partial\Omega \times \{0\}) = \emptyset$, gilt

$$\int_\Omega u_0(x)\phi(x, 0)dx - \int_{\Omega \times \mathbb{R}_t} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)(x, \tau)dxd\tau + \int_{\Omega \times \mathbb{R}_t} (u\nabla V + \nabla f(u))(x, \tau)\nabla\phi(x, \tau)dxd\tau = 0$$

Anmerkung:
Für beschränktes Ω erfüllen die Testfunktionen die Randbedingung

$$n(x) \cdot (u\nabla V + \nabla f(u))(x, t) = 0, (x \in \partial\Omega, t > 0)$$

Der Beweis ist in mehrere Schritte unterteilt.
Schritt 0: $u(t) \geq \rho_\infty, \rho_\infty \in \mathbb{R}^+$, für alle $t \in \mathbb{R}^+$
Nach Voraussetzung gilt $u_0 \geq \rho_0$ für ein $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$.

Der Beweis ist in mehrere Schritte unterteilt.
Schritt 0: $u(t) \geq \rho_\infty, \rho_\infty \in \mathbb{R}^+$, für alle $t \in \mathbb{R}^+$
Nach Voraussetzung gilt $u_0 \geq \rho_0$ für ein $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$.
Da $h(0+) = -\infty$ gilt für jedes $C \in \mathbb{R}$:
$U(x, C) = \overline{h}^{-1}(C - V(x)) = h^{-1}(C - V(x))$, so dass $V + h(u(., C)) = C$.

Der Beweis ist in mehrere Schritte unterteilt.
Schritt 0: $u(t) \geq \rho_\infty, \rho_\infty \in \mathbb{R}^+$, für alle $t \in \mathbb{R}^+$
Nach Voraussetzung gilt $u_0 \geq \rho_0$ für ein $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$.
Da $h(0+) = -\infty$ gilt für jedes $C \in \mathbb{R}$:
$U(x, C) = \overline{h}^{-1}(C - V(x)) = h^{-1}(C - V(x))$, so dass $V + h(u(., C)) = C$.
Man erhält, dass $U(., C)$ eine schwache Lösung von (1) ist (mit $u(t = 0) = U(., C))$.

Der Beweis ist in mehrere Schritte unterteilt.
Schritt 0: $u(t) \geq \rho_\infty, \rho_\infty \in \mathbb{R}^+$, für alle $t \in \mathbb{R}^+$
Nach Voraussetzung gilt $u_0 \geq \rho_0$ für ein $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$.
Da $h(0+) = -\infty$ gilt für jedes $C \in \mathbb{R}$:
$U(x, C) = \overline{h}^{-1}(C - V(x)) = h^{-1}(C - V(x))$, so dass $V + h(u(., C)) = C$.
Man erhält, dass $U(., C)$ eine schwache Lösung von (1) ist (mit $u(t = 0) = U(., C)$).
Weiterhin gilt $U(., C) \leq h^{-1}(C)$. Da $\lim_{C \to -\infty} h^{-1}(C) = 0$ können wir ein $C_\infty \in \mathbb{R}$ wählen, so dass $u_0 \geq \rho_0 > h^{-1}(C_\infty) \geq C(., C_\infty)$.

Der Beweis ist in mehrere Schritte unterteilt.
Schritt 0: $u(t) \geq \rho_\infty, \rho_\infty \in \mathbb{R}^+$, für alle $t \in \mathbb{R}^+$
Nach Voraussetzung gilt $u_0 \geq \rho_0$ für ein $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$.
Da $h(0+) = -\infty$ gilt für jedes $C \in \mathbb{R}$:
$U(x, C) = \overline{h}^{-1}(C - V(x)) = h^{-1}(C - V(x))$, so dass $V + h(u(., C)) = C$.
Man erhält, dass $U(., C)$ eine schwache Lösung von (1) ist (mit $u(t = 0) = U(., C))$.
Weiterhin gilt $U(., C) \leq h^{-1}(C)$. Da $\lim_{C \to -\infty} h^{-1}(C) = 0$ können wir ein $C_\infty \in \mathbb{R}$ wählen, so dass $u_0 \geq \rho_0 > h^{-1}(C_\infty) \geq C(., C_\infty)$. Somit erhält man aus dem Vergleichsprinzip für strikt positive schwache Lösungen

$$u(t) \geq U(., C_\infty) \geq \inf_{x \in \Omega} U(x, C_\infty) =: \rho_\infty$$

und aus der Beschränktheit von V auf Ω folgt $\rho_\infty \in \mathbb{R}^+$.

Schritt 1: $RE(u(t)|u_{\infty,M})$ ist fallend mit $\lim_{t\to\infty} RE(u(t)|u_{\infty,M}) = 0.$
Da $u(t) \geq \rho_\infty$ unabhängig von t und da für alle $T > 0$, $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$, kann man Ableitungen und Integral vertauschen und erhält:

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$$

mit

$$-I(u(t)) = \frac{d}{dt} RE(u(t)|u_{\infty,M}) = \int_\Omega (V + h(u)) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x,t)dx \qquad (5)$$

Schritt 1: $RE(u(t)|u_{\infty,M})$ ist fallend mit $\lim_{t\to\infty} RE(u(t)|u_{\infty,M}) = 0$.
Da $u(t) \geq \rho_\infty$ unabhängig von t und da für alle $T > 0$, $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$, kann man Ableitungen und Integral vertauschen und erhält:

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$$

mit

$$-I(u(t)) = \frac{d}{dt} RE(u(t)|u_{\infty,M}) = \int_\Omega (V + h(u)) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x,t)dx \qquad (5)$$

Da u eine starke Lösung ist, kann man $\partial u/\partial t$ durch $div(u\nabla V(x) + \nabla f(u))$ ersetzen und erhält nach partieller Integration unter Ausnutzung der Randbedingung

$$I(u(t)) = \int_\Omega u(x,t)|y|^2(x,t)dx, \text{ wobei } y(x,t) = (\nabla V + \nabla h(u))(x,t)$$

Schritt 1: $RE(u(t)|u_{\infty,M})$ ist fallend mit $\lim_{t\to\infty} RE(u(t)|u_{\infty,M}) = 0$.
Da $u(t) \geq \rho_\infty$ unabhängig von t und da für alle $T > 0$, $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$, kann man Ableitungen und Integral vertauschen und erhält:

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$$

mit

$$-I(u(t)) = \frac{d}{dt} RE(u(t)|u_{\infty,M}) = \int_\Omega (V + h(u)) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x,t)dx \qquad (5)$$

Da u eine starke Lösung ist, kann man $\partial u/\partial t$ durch $div(u\nabla V(x) + \nabla f(u))$ ersetzen und erhält nach partieller Integration unter Ausnutzung der Randbedingung

$$I(u(t)) = \int_\Omega u(x,t)|y|^2(x,t)dx, \text{ wobei } y(x,t) = (\nabla V + \nabla h(u))(x,t)$$

Somit ist die Funktion $t \mapsto RE(u(t)|u_{\infty,M}), t \in \mathbb{R}_0^+$ fallend. Zudem ist $RE(u(t)|u_{\infty,M}) \geq 0$.

Somit ist die Funktion $t \mapsto RE(u(t)|u_{\infty,M}), t \in \mathbb{R}_0^+$ fallend. Zudem ist $RE(u(t)|u_{\infty,M}) \geq 0$. Wir erhalten: $\lim_{t\to\infty} RE(u(t)|u_{\infty,M}) =: H^*$ existiert.

Somit ist die Funktion $t \mapsto RE(u(t)|u_{\infty,M}), t \in \mathbb{R}_0^+$ fallend. Zudem ist $RE(u(t)|u_{\infty,M}) \geq 0$. Wir erhalten: $\lim_{t\to\infty} RE(u(t)|u_{\infty,M}) =: H^*$ existiert. Weiterhin gilt für alle $t \in \mathbb{R}^+$ die Abschätzung

$$\infty > RE(u_0|u_{\infty,M}) \geq RE(u_0|u_{\infty,M}) - RE(u(t)|u_{\infty,M}) = \int_0^t I(u(s))ds.$$

Somit ist die Funktion $t \mapsto RE(u(t)|u_{\infty,M}), t \in \mathbb{R}_0^+$ fallend. Zudem ist $RE(u(t)|u_{\infty,M}) \geq 0$. Wir erhalten: $\lim_{t\to\infty} RE(u(t)|u_{\infty,M}) =: H^*$ existiert. Weiterhin gilt für alle $t \in \mathbb{R}^+$ die Abschätzung

$$\infty > RE(u_0|u_{\infty,M}) \geq RE(u_0|u_{\infty,M}) - RE(u(t)|u_{\infty,M}) = \int_0^t I(u(s))ds.$$

Aus der Nicht-Negativität von $I(u(.))$ erhalten wir $I(u(.)) \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$ und

$$0 \leq \int_0^\infty I(u(s))ds \leq RE(u_0|u_{\infty,M}).$$

Des Weiteren kann man zeigen, dass $H^* = 0$ gilt.

Schritt 2: Berechnung von $\frac{d}{dt} I(u(t))$

Zum Berechnen der Abfallgeschwindigkeit betrachtet man die zeitliche Entwicklung von $I(u(t))$:

$$\frac{d}{dt} I(u(t)) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} |y|^2 \right)(x,t)dx + 2 \int_\Omega \left(uy \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right)(x,t)dx$$

Schritt 2: Berechnung von $\frac{d}{dt} I(u(t))$

Zum Berechnen der Abfallgeschwindigkeit betrachtet man die zeitliche Entwicklung von $I(u(t))$:

$$\frac{d}{dt} I(u(t)) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} |y|^2 \right)(x,t)dx + 2 \int_\Omega \left(uy \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right)(x,t)dx$$

Dies kann man unter Ausnutzung der Randbedingungen, der Glattheit der genutzten Funktionen und einiger Theoreme umformen zu:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} I(u(t)) \\
&= -2 \int_\Omega \left(u(y \cdot Hess(V) \cdot y^T) \right)(x,t)dx - 2 \int_\Omega \left((f'(u)u - f(u))(\nabla y)^1 \right)(x,t)dx \\
&\quad - 2 \int_\Omega \left(f(u) \left(\sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^2 \right) \right)(x,t)dx + 2 \int_{\partial\Omega} f(u)(y \cdot \text{Jacob}(y) \cdot n^T)dS \\
&\qquad \leq -2\alpha_1 I(u(t)) - R(t) \qquad (6)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die gleichmäßige Konvexität von V ausgenutzt und es wurde die Abkürzung $R(t)$ eingeführt.

Schritt 3: Exponentieller Abfall von $I(u(t))$.

Hier genügt es zu zeigen, dass $R(t) \geq 0$.

Schritt 3: Exponentieller Abfall von $I(u(t))$.

Hier genügt es zu zeigen, dass $R(t) \geq 0$.

Zunächst zeigt man hierfür mit Hilfe von Differentialgeometrie, dass das Integral über $\partial\Omega$ negativ ist.

Schritt 3: Exponentieller Abfall von $I(u(t))$.

Hier genügt es zu zeigen, dass $R(t) \geq 0$.
Zunächst zeigt man hierfür mit Hilfe von Differentialgeometrie, dass das Integral über $\partial\Omega$ negativ ist.
Anschließend zeigt man, dass die beiden übrigen Integrale nicht-negativ sind, falls

$$f(u) \leq \frac{d}{d-1} u f'(u) \text{ für jedes } u > 0.$$

Schritt 3: Exponentieller Abfall von $I(u(t))$.

Hier genügt es zu zeigen, dass $R(t) \geq 0$.

Zunächst zeigt man hierfür mit Hilfe von Differentialgeometrie, dass das Integral über $\partial\Omega$ negativ ist.

Anschließend zeigt man, dass die beiden übrigen Integrale nicht-negativ sind, falls

$$f(u) \leq \frac{d}{d-1} u f'(u) \text{ für jedes } u > 0.$$

Da dies jedoch vorausgesetzt war, erhält man insgesamt $R(t) \geq 0$ und somit

$$I(u(t)) \leq I(u(t_0)) e^{-2\alpha_1 (t-t_0)}$$

Schritt 4: Exponentieller Abfall von $RE(u(t)|u_{\infty,M})$. Stellt man die Ungleichung (6) aus Schritt 2 nach $I(u(t))$ um und setzt dies in die Definitionsgleichung für $I(u(t))$ (5), so erhält man

$$2\alpha_1 \frac{d}{dt} RE(u(t)|u_{\infty,M}) \geq \frac{d}{dt} I(u(t)) + R(t)$$

Schritt 4: Exponentieller Abfall von $RE(u(t)|u_{\infty,M})$. Stellt man die Ungleichung (6) aus Schritt 2 nach $I(u(t))$ um und setzt dies in die Definitionsgleichung für $I(u(t))$ (5), so erhält man

$$2\alpha_1 \frac{d}{dt} RE(u(t)|u_{\infty,M}) \geq \frac{d}{dt} I(u(t)) + R(t)$$

Unter Ausnutzung von $\lim_{t\to\infty} RE(u(t)|u_{\infty,M}) = 0$ (Schritt 1) integriert man nun zwischen $t \geq 0$ und $+\infty$ und erhält

$$0 \leq RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq \frac{1}{2\alpha_1} I(u(t)), t \geq 0$$

Somit kann man unter erneuter Ausnutzung von (5) schließen

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u(t_0)|u_{\infty,M}) e^{-2\alpha_1(t-t_0)}$$

Ziel ist nun, die Voraussetzungen (A0)-(A5) loszuwerden. Zunächst nutzt man hierfür

Theorem

Seien (HD1)-(HD2), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF4), sowie beschränktes Ω vorausgesetzt, sowie

- (HD3) $u_0 \in L^\infty(\Omega)$
- (HF5) *Falls* $h(0+) > -\infty$, *so gibt es* $s_0 \in \mathbb{R}^+$ *mit* $f''(u) \leq 0$ *für alle* $u \in (0, s_0)$

Dann gilt:

- a) *(1), (2), (3) besitzen eine nicht-negative, massenerhaltende Lösung* u, *d.h.* $\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} = M, t > 0$.
- b) $u \in C(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega})$.
- c) *Falls* $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, *so gilt* $u \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \bar{\Omega})$.
- d) $u(t) \to u_{\infty,M}$ *in* $C(\bar{\Omega})$ *für* $t \to \infty$.

Nun möchte man unter den Voraussetzungen dieses Theorems exponentiellen Abfall der Entropie (und der Entropieproduktion) beweisen. Hierzu nutzt man eine "parabolische Approximation der Nichtlinearität f", falls $h(0+) = \underline{h} > -\infty$:

Proposition

Vorausgesetzt $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ erfüllt (HF1)-(HF5). Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Funktion $f_\epsilon : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, welche (HF1)-(HF5) erfüllt (wobei $h_\epsilon(u) := \int_1^u f_\epsilon'(s)s^{-1}ds, u > 0$) und

1. $0 < c_1(\epsilon) \leq f_\epsilon'(u)$ (somit $h_\epsilon(0+) = -\infty$ und $h_\epsilon(\infty) = \infty$) und $f'(u) \leq f_\epsilon'(u)$ für alle $u > 0$.
2. $f_\epsilon \to f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_0^+$ und $f_\epsilon' \to f'$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^+$ für $\epsilon \to 0$.
3. $h_\epsilon \to h$ für $\epsilon \to 0$ auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^+$.
4. $\overline{h_\epsilon}^{-1} \to \bar{h}^{-1}$ gleichmäßig auf jedem halb-endlichen Interfall $(-\infty, c]$, $c < h(\infty)$.
5. $\Phi_\epsilon \to \Phi$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_0^+$, wobei $\Phi_\epsilon : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \Phi_\epsilon(u) := \int_0^u h_\epsilon(s)ds$, d.h. $\Phi_\epsilon(u) = uh_\epsilon(u) - f_\epsilon(u)$ für $u > 0$ und $\Phi_\epsilon(0) = 0$.

Man kann nun zeigen, dass es für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Funktion $u_0^\epsilon \in C^2(\bar{\Omega})$ gibt, welche in $L^2(\Omega)$ gegen u_0 konvergiert.

Man kann nun zeigen, dass es für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Funktion $u_0^\epsilon \in C^2(\bar{\Omega})$ gibt, welche in $L^2(\Omega)$ gegen u_0 konvergiert.
Weiterhin zeigt man, dass nun das geglättete System von PDGL (mit Nichtlinearität f_ϵ) eine Lösung u^ϵ besitzt, welche (A0)-(A3) und (A5) erfüllt und zudem

1) $u^\epsilon \geq c(\epsilon) > 0$
2) $u^\epsilon \longrightarrow u$ gleichmäßig auf allen kompakten Intervallen $[\tau, T] \times \bar{\Omega}$ mit $0 < \tau \leq T$
3) $u^\epsilon \longrightarrow u$ stark in $L^2(Q_T)$ und f.ü..

Man führt nun den Grenzübergang $\epsilon \longrightarrow 0$ durch und erhält:

Theorem

Seien (HD1)-(HD3), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF5) sowie beschränktes Ω vorausgesetzt. Sei u die eindeutige, nicht-negative massenerhaltende Lösung von (1), (2), (3). Dann gilt

a) $RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u(t_0)|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1(t-t_0)}, t \geq t_0 \geq 0$

Theorem

Seien (HD1)-(HD3), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF5) sowie beschränktes Ω vorausgesetzt. Sei u die eindeutige, nicht-negative massenerhaltende Lösung von (1), (2), (3). Dann gilt

a) $RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u(t_0)|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1(t-t_0)}, t \geq t_0 \geq 0$

b) *Für alle* $t \geq 0$

$$K_f(u(t)) \leq J_h(u_0)e^{-2\alpha_1 t}$$

Theorem

Seien (HD1)-(HD3), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF5) sowie beschränktes Ω vorausgesetzt. Sei u die eindeutige, nicht-negative massenerhaltende Lösung von (1), (2), (3). Dann gilt

a) $RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u(t_0)|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1(t-t_0)}, t \geq t_0 \geq 0$

b) *Für alle* $t \geq 0$

$$K_f(u(t)) \leq J_h(u_0)e^{-2\alpha_1 t}$$

c) *Für alle* $t \geq 0$

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq \frac{e^{-2\alpha_1 t}}{2\alpha_1} J_h(u_0)$$

Theorem

Seien (HD1)-(HD3), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF5) sowie beschränktes Ω vorausgesetzt. Sei u die eindeutige, nicht-negative massenerhaltende Lösung von (1), (2), (3). Dann gilt

a) $RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u(t_0)|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1(t-t_0)}, t \geq t_0 \geq 0$

b) *Für alle* $t \geq 0$

$$K_f(u(t)) \leq J_h(u_0)e^{-2\alpha_1 t}$$

c) *Für alle* $t \geq 0$

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq \frac{e^{-2\alpha_1 t}}{2\alpha_1} J_h(u_0)$$

d) *Falls* $J_h(u_0) < \infty$, *so erfüllt die distributionale Ableitung*

$$I := -\frac{d}{dt}E(u(.)) = -\frac{d}{dt}RE(u(.)|u_{\infty,M}$$

die Gleichung $I \leq K_f(u(.))$ *im distributionalen Sinn.*

Aus dem vorherigen Theorem kann man als Nebenprodukt folgern

Korollar

Vorausgesetzt (HD1)-(HD3), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF5), insbesondere: $u_0(x) \leq 0$ gehört zu $L^\infty(\Omega)$ mit Masse M. Dann gilt

$$RE(u_0|u_{\infty,M}) \leq \frac{1}{2\alpha_1} J_h(u_0)$$

Aus dem vorherigen Theorem kann man als Nebenprodukt folgern

Korollar

Vorausgesetzt (HD1)-(HD3), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF5), insbesondere: $u_0(x) \leq 0$ gehört zu $L^\infty(\Omega)$ mit Masse M. Dann gilt

$$RE(u_0|u_{\infty,M}) \leq \frac{1}{2\alpha_1} J_h(u_0)$$

Ziel dieses Abschnitts ist es nun, eine solche Ungleichung für den $\mathbb{R}^d$ zu beweisen.
Hierzu wählt man eine positive Funktion $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit Masse M, so dass die Entropieproduktion $J_h(u_0)$ auf $\mathbb{R}^d$ endlich ist. Diese approximiert man durch Funktionen auf Bällen B_n mit Radius n um den Ursprung. Nun kann man (1) anwenden und der Grenzübergang $n \to \infty$ beendet den Beweis.

Theorem

Sei vorausgesetzt $\Omega = \mathbb{R}^d$ *und dass* u_0 *erfüllt* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $u_0 \leq 0$ *und* $\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)dx = M$. *Des Weiteren seien (HF1)-(HF5), (HV3)-(HV8) vorausgesetzt. Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* B_n *der Ball mit Radius* n *um den Ursprung. Nimmt man an*

(U1) *Es gibt* $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *und* $n_4 \in \mathbb{N}$, *so dass*

$$n|\nabla V|^2 ind_{\{x \in B_n : u_0(x) > n\}} \leq g, \forall n \geq n_4.$$

(U2) $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi^-(u_0)(x)dx < \infty.$

so gilt

$$RE(u_0|u_{\infty,M}) \leq \frac{1}{2\alpha_1} J_h(u_0)$$

Beweis: Für $J_h(u_0) = \infty$ ist man fertig. Deshalb sei im Folgenden $J_h(u_0) < \infty$.

Beweis: Für $J_h(u_0) = \infty$ ist man fertig. Deshalb sei im Folgenden $J_h(u_0) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ führen wir die Funktion

$$u_0^n := \min\{n, u_0\}|_{B_n}$$

ein. Man erkennt $u_0^n \in L^\infty(B_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Für $J_h(u_0) = \infty$ ist man fertig. Deshalb sei im Folgenden $J_h(u_0) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ führen wir die Funktion

$$u_0^n := \min\{n, u_0\}|_{B_n}$$

ein. Man erkennt $u_0^n \in L^\infty(B_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter definieren wir

$$M_n := \int_{B_n} u_0^n(x)dx$$

$$\bar{M}_n := \sup\left\{\int_{B_n} \bar{h}^{-1}(C - V)dx : \bar{h}^{-1}(C - V)|_{B_n} \in L^1(B_n)\right\}.$$

Beweis: Für $J_h(u_0) = \infty$ ist man fertig. Deshalb sei im Folgenden $J_h(u_0) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ führen wir die Funktion

$$u_0^n := \min\{n, u_0\}|_{B_n}$$

ein. Man erkennt $u_0^n \in L^\infty(B_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter definieren wir

$$M_n := \int_{B_n} u_0^n(x)dx$$

$$\bar{\mathbf{M}}_n := \sup\left\{\int_{B_n} \bar{h}^{-1}(C-V)dx : \bar{h}^{-1}(C-V)|_{B_n} \in L^1(B_n)\right\}.$$

Man erkennt, dass $M_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $M_n \to M$ und aus der Beschränktheit von B_n folgt,

$$\bar{\mathbf{M}}_N = \lim_{C \to h(\infty)} \int_{B_n} \bar{h}^{-1}(C-V)dx$$

Beweis: Für $J_h(u_0) = \infty$ ist man fertig. Deshalb sei im Folgenden $J_h(u_0) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ führen wir die Funktion

$$u_0^n := \min\{n, u_0\}|_{B_n}$$

ein. Man erkennt $u_0^n \in L^\infty(B_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter definieren wir

$$M_n := \int_{B_n} u_0^n(x)dx$$
$$\bar{\mathbf{M}}_n := \sup\left\{\int_{B_n} \bar{h}^{-1}(C - V)dx : \bar{h}^{-1}(C - V)|_{B_n} \in L^1(B_n)\right\}.$$

Man erkennt, dass $M_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $M_n \to M$ und aus der Beschränktheit von B_n folgt,

$$\bar{\mathbf{M}}_N = \lim_{C \to h(\infty)} \int_{B_n} \bar{h}^{-1}(C - V)dx$$

Da $\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} \bar{h}^{-1}(C - V)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{h}^{-1}(C - V)dx$ für alle $C < h(\infty)$, erhält man $\bar{\mathbf{M}} \leq \liminf_{n\to\infty} \bar{\mathbf{M}}_n$.

Nun gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $0 < M_n < \min\{\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{M}}_n\}$, $n_0 \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Nun gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $0 < M_n < \min\{\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{M}}_n\}, n_0 \leq n, n \in \mathbb{N}$. Dies erlaubt uns die Funktion

$$u^n_{\infty, M_n} := \bar{h}^{-1}(C_n - V^n)$$

zu definieren mit $C_n \in \mathbb{R}$ so, dass $\int_{B_n} \bar{h}^{-1}(C_n - V^n(x))dx = M_n$.

Nun gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $0 < M_n < \min\{\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{M}}_n\}$, $n_0 \leq n, n \in \mathbb{N}$.
Dies erlaubt uns die Funktion

$$u^n_{\infty, M_n} := \bar{h}^{-1}(C_n - V^n)$$

zu definieren mit $C_n \in \mathbb{R}$ so, dass $\int_{B_n} \bar{h}^{-1}(C_n - V^n(x))dx = M_n$.
Weiter definieren wir die Funktionale

$$E^n : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
$$u \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int_{B_n} (V(x)u(x) + \Phi(u(x)))dx, & Vu, \Phi(u) \in L^1(B_n) \\ \infty, & sonst \end{cases}$$

mit $\mathcal{C}_n := \left\{ u \in L^1(B_n) : u \geq 0, \int_{B_n} u(x)dx = M \right\}$

$$L_h^n : L_+^1(B_n) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$L_h^n(u) = \begin{cases} \int_{u>0} \left(u|\nabla V + \nabla h(u))|^2\right)(x)dx, u \in \mathcal{D}_h^n \\ \infty, sonst \end{cases}$$

mit $\mathcal{D}_h^n := \{u \in L_+^1(B_n) : H(u) \in L_{loc}^1(B_n), \nabla h(u) \in L_{loc}^1(B_n : \mathbb{R}^d)\}$

Schritt 1: $E^n(u^n_{\infty,M_n}) < \infty$, für alle $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$ Das ist aber offensichtlich, Da u^n_{∞,M_n} beschränkt ist auf B_n. Somit kann man für jedes $n_0 \leq n$ definieren

$$RE^n(u_0^n | u^n_{\infty,M_n}) := E^n(u_0^n) - E^n(u^n_{\infty,M_n})$$

Schritt 1: $E^n(u^n_{\infty,M_n}) < \infty$, für alle $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$ Das ist aber offensichtlich, Da u^n_{∞,M_n} beschränkt ist auf B_n. Somit kann man für jedes $n_0 \leq n$ definieren

$$RE^n(u^n_0|u^n_{\infty,M_n}) := E^n(u^n_0) - E^n(u^n_{\infty,M_n})$$

Schritt 2: Es gibt $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n_1$ und

$$RE^n(u^n_0|u^n_{\infty,M_n}) \leq \frac{1}{2\alpha_1} J^n_h(u^n_0),\, n_1 \leq n \in \mathbb{N}$$

Hier möchten wir (1) benutzen, müssen also die dort gestellten Voraussetzungen für $\Omega = B_n$, u^n_0, M_n und v^n, $n \in \mathbb{N}$ ausreichend groß überprüfen. Diese sind alle erfüllt.

Schritt 3: $\lim_{n\to\infty} J_h^n(u_0^n) = J_h(u_0)$. Man definiert für $n_1 \leq n$

$\mathbf{a}_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{a}_n(x) = \begin{cases} u_0(x)|\nabla V + \nabla h(u_0)|^2(x), x \in B_n, 0 < u_0(x) \leq n \\ n|\nabla V|^2(x), x \in B_n, u_0(x) > n \\ 0, sonst \end{cases}$$

wobei wir stillschweigend ausnutzen, dass sowohl $h(u_0)$ als auch $\nabla h(u_0)$ lokal integrierbar sind.

Schritt 3: $\lim_{n\to\infty} J_h^n(u_0^n) = J_h(u_0)$. Man definiert für $n_1 \leq n$

$$\mathbf{a}_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$

$$\mathbf{a}_n(x) = \begin{cases} u_0(x)|\nabla V + \nabla h(u_0)|^2(x), x \in B_n, 0 < u_0(x) \leq n \\ n|\nabla V|^2(x), x \in B_n, u_0(x) > n \\ 0, sonst \end{cases}$$

wobei wir stillschweigend ausnutzen, dass sowohl $h(u_0)$ als auch $\nabla h(u_0)$ lokal integrierbar sind. Es ist nun

$$J_h^1 n(u_0^n) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{a}_n(x)dx$$

und für n groß genug ((U1))

$$0 \leq \mathbf{a}_n \leq u_o|\nabla V + \nabla h(u_0)|^2 + g \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Schritt 3: $\lim_{n\to\infty} J_h^n(u_0^n) = J_h(u_0)$. Man definiert für $n_1 \le n$

$$\mathbf{a}_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$

$$\mathbf{a}_n(x) = \begin{cases} u_0(x)|\nabla V + \nabla h(u_0)|^2(x), x \in B_n, 0 < u_0(x) \le n \\ n|\nabla V|^2(x), x \in B_n, u_0(x) > n \\ 0, sonst \end{cases}$$

wobei wir stillschweigend ausnutzen, dass sowohl $h(u_0)$ als auch $\nabla h(u_0)$ lokal integrierbar sind. Es ist nun

$$J_h^1 n(u_0^n) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{a}_n(x) dx$$

und für n groß genug ((U1))

$$0 \le \mathbf{a}_n \le u_o|\nabla V + \nabla h(u_0)|^2 + g \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Klar ist zudem $\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n(x) = (u_o|\nabla V + \nabla h(u_0)|^2)\mathrm{ind}_{\{u_0>0\}}(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und somit folgt mit majorisierter Konvergenz $\lim_{n\to\infty} J_h^n(u_0^n) = J_h(u_0)$.

Schritt 4: $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_{\infty,M_n}) = E(u_{\infty,M})$
Aus $M_n \to M$ folgert man $\lim_{n\to\infty} C_n = C$. Des weiteren schließt man, dass $u^n_{\infty,M_n} \to u_{\infty,M}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$. Nun folgert man mit einem Lemma (welches majorisierte Konvergenz nutzt) $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_{\infty,M_n}) = E(u_{\infty,M})$.

Schritt 4: $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_{\infty,M_n}) = E(u_{\infty,M})$
Aus $M_n \to M$ folgert man $\lim_{n\to\infty} C_n = C$. Des weiteren schließt man, dass $u^n_{\infty,M_n} \to u_{\infty,M}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$. Nun folgert man mit einem Lemma (welches majorisierte Konvergenz nutzt) $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_{\infty,M_n}) = E(u_{\infty,M})$.

Schritt 5: $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_0) = E(u_0)$.
Bezeichnet man die triviale Fortsetzung von u^n_0 auf $\mathbb{R}^d$ mit $[u^n_0]^{ext}$, so erhält man $[u^n_0]^{ext} \leq [u^{n+1}_0]^{ext} \leq u_0$. Nun folgt aus einem Lemma (welches monotone Konvergenz nutzt) $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_0) = E(u_0)$.

Schritt 4: $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_{\infty,M_n}) = E(u_{\infty,M})$

Aus $M_n \to M$ folgert man $\lim_{n\to\infty} C_n = C$. Des weiteren schließt man, dass $u^n_{\infty,M_n} \to u_{\infty,M}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$. Nun folgert man mit einem Lemma (welches majorisierte Konvergenz nutzt) $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_{\infty,M_n}) = E(u_{\infty,M})$.

Schritt 5: $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_0) = E(u_0)$.

Bezeichnet man die triviale Fortsetzung von u^n_0 auf $\mathbb{R}^d$ mit $[u^n_0]^{ext}$, so erhält man $[u^n_0]^{ext} \leq [u^{n+1}_0]^{ext} \leq u_0$. Nun folgt aus einem Lemma (welches monotone Konvergenz nutzt) $\lim_{n\to\infty} E^n(u^n_0) = E(u_0)$.

Schritt 6: Beweisende

Aus Schritt 4 und 5 folgt $\lim_{n\to\infty} RE^n(u^n_0|u_{\infty,M_n}) = RE(u_0|u_{\infty,M})$, aus Schritt 3 weiß man, dass $\lim_{n\to\infty} J^n_h(u^n_0) = J_h(u_0)$. Somit kann man in Schritt 2 den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen und ist fertig.

Hauptproblem, beim Versuch das Langzeitverhalten im $\mathbb{R}^d$ anzugehen, ist das Fehlen von Existenz und Eindeutigkeitsbeweisen Für dieses System von PDGLs. Gezeigt wird die Existenz einer schwachen Lösung sowie die exponentielle Konvergenz von Entropie und Entropieproduktion.
Bezeichne $F(u)$ eine Stammfunktion der Nichtlinearität $F(u)$ mit $F(0) = 0$ und $G(u) = uf(u) - F(u)$ so, dass $G'(u) = uf'(u)$.

Theorem

Seien (HD1)-(HD2), (HV3)-(HV8), (HF1)-(HF5) und zudem (U1),(U2) vorausgesetzt. Weiter sei gefordert

- (HE1) $F(u_0) \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
- (HE2) *Es gibt* $A > 0$, *so dass* $G(u) \leq AF(u)$ *für* $u > 0$.
- (HE3) $\Delta V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.
- (HE4) $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.
- (HF6) *Entweder ist* f *konvex auf* $[0, \infty)$ *oder* f^{-1} *ist Hölder stetig.*
- (HF7) *Falls* $h(0+) = -\infty$, *so existiere* $0 < s_1 < 1$, *so dass*

$$b := \sup \left\{ \frac{\Phi(u)}{uh(u)}, 0 < u < s_1 \right\} < +\infty$$

Theorem

Dann existiert eine schwache Lösung mit

a) *Falls $h(0+) = -\infty$, dann gilt für alle $t > 0$*

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u_0|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1 t}$$

Falls $h(0+) > -\infty$, dann gilt für alle $t > 0$

$$\tilde{RE}(u(t)|u_{\infty,M}) = \tilde{E}(u(t)) - \tilde{E}(u_{\infty,M}) \leq RE(u_0|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1 t}$$

Theorem

Dann existiert eine schwache Lösung mit

a) *Falls $h(0+) = -\infty$, dann gilt für alle $t > 0$*

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u_0|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1 t}$$

Falls $h(0+) > -\infty$, dann gilt für alle $t > 0$

$$\tilde{RE}(u(t)|u_{\infty,M}) = \tilde{E}(u(t)) - \tilde{E}(u_{\infty,M}) \leq RE(u_0|u_{\infty,M})e^{-2\alpha_1 t}$$

b) *Für alle $t > 0$ gilt*

$$K_f(u(t)) \leq J_h(u_0)e^{-2\alpha_1 t}$$

c) *Für alle $t > 0$ gilt*

$$\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = M$$

Erinnerung: Falls $h(0+) > -\infty$, so setzt man $\tilde{\Phi}(u) = \Phi(u) - h(0+)u$. Es ist $\tilde{\Phi}(u) > 0$ und man definiert

$$\tilde{E} : L^1_+(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \tilde{E}(u) = \int_\Omega (Vu + \tilde{\Phi}(u))(x)dx$$

Schritt 1: Folge von Approximationsproblemen

Man betrachte die Folge von Teilmengen Ω_n, welche definiert ist durch

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) \leq n\}$$

Schritt 1: Folge von Approximationsproblemen

Man betrachte die Folge von Teilmengen Ω_n, welche definiert ist durch

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) \leq n\}$$

Aus (HV3)-(HV8) folgt, dass Ω_n eine wachsende Folge von konvexen, beschränkten, glatten Teilmengen ist, die für $n \to \infty$ den $\mathbb{R}^d$ überdeckt. Nun definiert man

$$u_0^n := u_0|_{\Omega_n}$$

Es ist $u_0^n \in L^\infty(\Omega_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Schritt 1: Folge von Approximationsproblemen

Man betrachte die Folge von Teilmengen Ω_n, welche definiert ist durch

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) \leq n\}$$

Aus (HV3)-(HV8) folgt, dass Ω_n eine wachsende Folge von konvexen, beschränkten, glatten Teilmengen ist, die für $n \to \infty$ den $\mathbb{R}^d$ überdeckt. Nun definiert man

$$u_0^n := u_0|_{\Omega_n}$$

Es ist $u_0^n \in L^\infty(\Omega_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man folgt nun der Notation aus dem vorherigen Theorem, wo man B_n durch Ω_n ersetzt. Mit den gleichen Argumenten wie dort, erhält man

1. $M_n \leq M$, $M_n \to M$, $0 < M_n < \min\{\bar{\mathbf{M}}(\Omega_n 9, \bar{\mathbf{M}}\}$
2. $E^n(u_0^n) \to E(u_0)$
3. $J_h^n(u_0^n) \to J_h(u_0)$
4. $E^n(u_{\infty,M_n}^n) \to E(u_{\infty,M})$
5. $\int_{\Omega_n} F(u_0^n)dx \to \int \mathbb{R}^d F(u_0)dx$

Wählt man nun u_0^n als Startwert für das System von PDGLs im beschränkten Gebiet Ω_n, so erhält man, dass die eindeutige Lösung u^n erfüllt

$$K_f^n(u^n(t)) \leq J_h(u_0^n)e^{-2\alpha_1 t}$$

$$RE^n(u^n|u_{\infty,M_n}^n) \leq RE^n(u_o 1n|u_{\infty,M_n}^n)e^{-2\alpha_1 t}$$

Schritt 2: Energie Abschätzungen Jede Lösung u^n erhält man entsprechend wie für beschränktes Ω als Grenzfall eines geglätteten Problems. Mit Hilfe der Lösung für diese Problem $u^{n,\epsilon}$ und dem Grenzübergang $\epsilon \to 0$ zeigt man

$$\int_{\Omega_n} F(u^n)dx \leq \exp\{a\|\Delta V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}t\} \int_{\Omega_n} F(u_0 1n)dx$$

$$\int_o^T \int_{\Omega_n} |\nabla f(u^n)|^2 dxdt \leq C(T,V) \int_{\Omega_n} F(u_0^n)dx$$

Schritt 2: Energie Abschätzungen Jede Lösung u^n erhält man entsprechend wie für beschränktes Ω als Grenzfall eines geglätteten Problems. Mit Hilfe der Lösung für diese Problem $u^{n,\epsilon}$ und dem Grenzübergang $\epsilon \to 0$ zeigt man

$$\int_{\Omega_n} F(u^n)dx \leq \exp\{a\|\Delta V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}t\} \int_{\Omega_n} F(u_0 1n)dx$$

$$\int_o^T \int_{\Omega_n} |\nabla f(u^n)|^2 dxdt \leq C(T,V) \int_{\Omega_n} F(u_0^n)dx$$

Schritt 3: L^∞_{loc} Abschätzung Hier zeigt man, erneut unter Hilfe der Lösung des geglätteten Problems, dass u^n beschränkt ist in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,T))$.

Schritt 2: Energie Abschätzungen Jede Lösung u^n erhält man entsprechend wie für beschränktes Ω als Grenzfall eines geglätteten Problems. Mit Hilfe der Lösung für diese Problem $u^{n,\epsilon}$ und dem Grenzübergang $\epsilon \to 0$ zeigt man

$$\int_{\Omega_n} F(u^n)dx \leq \exp\{a\|\Delta V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}t\} \int_{\Omega_n} F(u_0 1n)dx$$

$$\int_o^T \int_{\Omega_n} |\nabla f(u^n)|^2 dxdt \leq C(T,V) \int_{\Omega_n} F(u_0^n)dx$$

Schritt 3: L^∞_{loc} Abschätzung Hier zeigt man, erneut unter Hilfe der Lösung des geglätteten Problems, dass u^n beschränkt ist in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,T))$.

Schritt 4: Kompaktheit Für Ω beschränkt Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ sind $[u^n]^{ext}\nabla V$ und $[\nabla f(u^n)]^{ext}$ beschränkt in $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_t)$ und $[\frac{\partial u^n}{\partial t}]^{ext}$ beschränkt in $L^2_{loc}(\mathbb{R}, H^{-1}_{loc}(\Omega))$.

Schritt 2: Energie Abschätzungen Jede Lösung u^n erhält man entsprechend wie für beschränktes Ω als Grenzfall eines geglätteten Problems. Mit Hilfe der Lösung für diese Problem $u^{n,\epsilon}$ und dem Grenzübergang $\epsilon \to 0$ zeigt man

$$\int_{\Omega_n} F(u^n)dx \leq \exp\{a\|\Delta V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}t\} \int_{\Omega_n} F(u_0 1n)dx$$

$$\int_o^T \int_{\Omega_n} |\nabla f(u^n)|^2 dxdt \leq C(T,V) \int_{\Omega_n} F(u_0^n)dx$$

Schritt 3: L^∞_{loc} Abschätzung Hier zeigt man, erneut unter Hilfe der Lösung des geglätteten Problems, dass u^n beschränkt ist in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,T))$.

Schritt 4: Kompaktheit Für Ω beschränkt Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ sind $[u^n]^{ext}\nabla V$ und $[\nabla f(u^n)]^{ext}$ beschränkt in $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_t)$ und $[\frac{\partial u^n}{\partial t}]^{ext}$ beschränkt in $L^2_{loc}(\mathbb{R}, H^{-1}_{loc}(\Omega))$.

Mit Hilfe von anderen Papern folgt aus f konvex oder f^{-1} Hölder-stetig die Kompaktheit der Folge $[u^n]^{ext}$ in $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_t)$ für jedes beschränkte Ω.

Schritt 2: Energie Abschätzungen Jede Lösung u^n erhält man entsprechend wie für beschränktes Ω als Grenzfall eines geglätteten Problems. Mit Hilfe der Lösung für diese Problem $u^{n,\epsilon}$ und dem Grenzübergang $\epsilon \to 0$ zeigt man

$$\int_{\Omega_n} F(u^n)dx \leq \exp\{a\|\Delta V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}t\} \int_{\Omega_n} F(u_0 1n)dx$$

$$\int_o^T \int_{\Omega_n} |\nabla f(u^n)|^2 dxdt \leq C(T,V) \int_{\Omega_n} F(u_0^n)dx$$

Schritt 3: L^∞_{loc} Abschätzung Hier zeigt man, erneut unter Hilfe der Lösung des geglätteten Problems, dass u^n beschränkt ist in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,T))$.

Schritt 4: Kompaktheit Für Ω beschränkt Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ sind $[u^n]^{ext}\nabla V$ und $[\nabla f(u^n)]^{ext}$ beschränkt in $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_t)$ und $[\frac{\partial u^n}{\partial t}]^{ext}$ beschränkt in $L^2_{loc}(\mathbb{R}, H^{-1}_{loc}(\Omega))$.
Mit Hilfe von anderen Papern folgt aus f konvex oder f^{-1} Hölder-stetig die Kompaktheit der Folge $[u^n]^{ext}$ in $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_t)$ für jedes beschränkte Ω.
Somit folgt die Konvergenz einer Teilfolge in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t)$ und f.ü. in $\mathbb{R}^d$ gegen eine positive Funktion u. Man prüft nach, dass u eine schwache Lösung des Systems von PDGL ist.

Schritt 5: Beweis von a) Hier müssen wir den Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ in der unter Schritt 1 aufgestellten Ungleichung durchführen. Die Konvergenz der rechten Seite ist aus bereits gezeigten Eigenschaften von u_0^n klar.

Schritt 5: Beweis von a) Hier müssen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ in der unter Schritt 1 aufgestellten Ungleichung durchführen. Die Konvergenz der rechten Seite ist aus bereits gezeigten Eigenschaften von u_0^n klar.
Aus Schritt 4 folgt, das für f.a. $t > 0$ $[u^n]^{ext}(t)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ und f.ü. in $\mathbb{R}^d$ gegen $u(t)$ konvergiert. Wir wählen ein $t > 0$ für das dies gilt. Betrachte nun die linke Seite der Ungleichung.

Schritt 5: Beweis von a) Hier müssen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ in der unter Schritt 1 aufgestellten Ungleichung durchführen. Die Konvergenz der rechten Seite ist aus bereits gezeigten Eigenschaften von u_0^n klar.
Aus Schritt 4 folgt, das für f.a. $t > 0$ $[u^n]^{ext}(t)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ und f.ü. in $\mathbb{R}^d$ gegen $u(t)$ konvergiert. Wir wählen ein $t > 0$ für das dies gilt. Betrachte nun die linke Seite der Ungleichung.
Falls $h(0+) = -\infty$, so wissen wir, dass

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) = E(u(t)|u_{\infty,M})$$
$$RE^n(u^n(t)|u^n_{\infty,M_n}) = E^n(u^n(t)|u^n_{\infty,M_n})$$

mit

$$E^n(u^n(t)|u^n_{\infty,M_n}) = \int_{\Omega_n} (\Phi(u^n) - \Phi(u^n_{\infty,m_n}) - \Phi'(u^n_{\infty,M_n})(u^n - u^n_{\infty,M_n}))(x,t)dx$$

Schritt 5: Beweis von a) Hier müssen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ in der unter Schritt 1 aufgestellten Ungleichung durchführen. Die Konvergenz der rechten Seite ist aus bereits gezeigten Eigenschaften von u_0^n klar.
Aus Schritt 4 folgt, das für f.a. $t > 0$ $[u^n]^{ext}(t)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ und f.ü. in $\mathbb{R}^d$ gegen $u(t)$ konvergiert. Wir wählen ein $t > 0$ für das dies gilt. Betrachte nun die linke Seite der Ungleichung.
Falls $h(0+) = -\infty$, so wissen wir, dass

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) = E(u(t)|u_{\infty,M})$$
$$RE^n(u^n(t)|u^n_{\infty,M_n}) = E^n(u^n(t)|u^n_{\infty,M_n})$$

mit

$$E^n(u^n(t)|u^n_{\infty,M_n}) = \int_{\Omega_n} (\Phi(u^n) - \Phi(u^n_{\infty,m_n}) - \Phi'(u^n_{\infty,M_n})(u^n - u^n_{\infty,M_n}))(x,t)dx$$

Da $u^n(t)$ f.ü. gegen $u(t)$ konvergiert, konvergiert $u^n_{\infty,M}$ f.ü. gegen $u_{\infty,M}$ und da Φ eine konvexe Funktion ist, ist

$$[(\Phi(u^n) - \Phi(u^n_{\infty,M_n}) - \Phi'(u^n_{\infty,M_n})(u^n - u^n_{\infty,M_n}))(x,t)]^{ext}$$

eine Folge von positiven Funktionen, die f.ü. in $\mathbb{R}^d$ gegen

$$[(\Phi(u) - \Phi(u_{\infty,M}) - \Phi'(u_{\infty,M})(u - u_{\infty,M}))(x,t)]^{ext}$$

konvergiert.

Da $u^n(t)$ f.ü. gegen $u(t)$ konvergiert, konvergiert $u^n_{\infty,M}$ f.ü. gegen $u_{\infty,M}$ und da Φ eine konvexe Funktion ist, ist

$$[(\Phi(u^n) - \Phi(u^n_{\infty,M_n}) - \Phi'(u^n_{\infty,M_n})(u^n - u^n_{\infty,M_n}))(x,t)]^{ext}$$

eine Folge von positiven Funktionen, die f.ü. in $\mathbb{R}^d$ gegen

$$[(\Phi(u) - \Phi(u_{\infty,M}) - \Phi'(u_{\infty,M})(u - u_{\infty,M}))(x,t)]^{ext}$$

konvergiert.
Fatous Lemma impliziert, dass gilt

$$RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq \liminf_{n\to\infty} RE^n(u^n(t)|u^n_{\infty,M_n})$$

Mit einer analogen Argumentation folgert man für den $h(0+) > -\infty$-Fall, dass

$$\tilde{RE}(u(t)|u_{\infty,M}) \leq \liminf_{n\to\infty} RE^n(u^n(t)|u^n_{\infty,M_n})$$

Schritt 6: Beweis von b): Mit einem Lemma und den in Schritt 1 und 4 hergeleiteten Konvergenzen, ergibt sich

$$K_f^{\Omega}(u(t)) \leq \liminf_{n\to\infty} K_f^{\Omega}(u1n(t)) \leq \liminf_{n\to\infty} K_f^{n}(u^n(t))$$

Unter erneuter Ausnutzung der Betrachtungen von Schritt 1 ergibt sich

$$K_f^{\Omega}(u(t)) \leq J_h(u_0)e^{-2\alpha_1 t}$$

für jede beschränkte Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^d$, was b) beweist.

Schritt 6: Beweis von b): Mit einem Lemma und den in Schritt 1 und 4 hergeleiteten Konvergenzen, ergibt sich

$$K_f^{\Omega}(u(t)) \leq \liminf_{n\to\infty} K_f^{\Omega}(u1n(t)) \leq \liminf_{n\to\infty} K_f^{n}(u^n(t))$$

Unter erneuter Ausnutzung der Betrachtungen von Schritt 1 ergibt sich

$$K_f^{\Omega}(u(t)) \leq J_h(u_0)e^{-2\alpha_1 t}$$

für jede beschränkte Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^d$, was b) beweist.

Schritt 7: Beweis von c): Nach längerer Rechnung erhält man für R groß genug

$$\int_{B_R} u(x,t)dx \geq M - \epsilon$$

Man beweist die Massenerhaltung nun, indem man de Grenzübergang $\epsilon \to 0$ durchführt und benutzt, dass

$$\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq M$$

da $u^n(t) \to u(t)$ schwach in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Man kann nun etwa den Fall $F(u) = u^m$ und $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$ betrachten, für den bekannt ist, dass die schwache Lösung eindeutig, masseerhaltend und in $C([0,T], L^1(\mathbb{R}^d))$ für jedes $T > 0$ ist.

Korollar

Sei $u_0(x) \in L^1_+ \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit Masse M und $m \geq \frac{d-1}{d}$ und $m > \frac{d}{d+2}$. Dann erfüllt die schwache Lösung des Systems von PDGL mit $F(u) = u^m$ und $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$

a) Für f.a. $t > 0$, $RE(u(t)|u_{\infty,M}) \leq RE(u_0|u_{\infty,M})e^{-2t}$

b) Für f.a. $t > 0$, $K_v(u(t)) \leq J_h(u-0)e^{-2t}$

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung einer verallgemeinerten Csiszár-Kullback-Ungleichung für die relative Entropie $E(.|u_{\infty,M})$, welche im vorherigen Teil eingeführt wurde. D.h. wir suchen eine reellwertige Funktion U, so dass die Abschätzung

$$\|u - u_{\infty,M})\|_{L^1(\Omega)} \leq \mathrm{U}(E(u|u_{\infty,M}))$$

für eine möglichst große Menge von Funtionen u gilt.
Für einen größeren Anwendungsbereich wird dies vor einem maßtheoretischerem Hintergrund und für eine größere Klasse von konvexen Funktionen Φ als zuvor durchgeführt.

Im folgenden werden einige Notationen und Annahmen genutzt.

Im folgenden werden einige Notationen und Annahmen genutzt.

A.1 $\Phi : I \to \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_0^+$ oder $I = \mathbb{R}^+$, ist streng konvex und stetig. Falls $I = \mathbb{R}^+$ gelte $\Phi(0+) = \infty$.

Im folgenden werden einige Notationen und Annahmen genutzt.

A.1 $\Phi : I \to \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_0^+$ oder $I = \mathbb{R}^+$, ist streng konvex und stetig. Falls $I = \mathbb{R}^+$ gelte $\Phi(0+) = \infty$.

A.2 Φ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$ und wir definieren

$$I' := \{s \in I : \Phi \text{ ist differenzierbar in } s\}$$

und $h := \Phi' : I' \to \mathbb{R}$.

Im folgenden werden einige Notationen und Annahmen genutzt.

A.1 $\Phi : I \to \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_0^+$ oder $I = \mathbb{R}^+$, ist streng konvex und stetig. Falls $I = \mathbb{R}^+$ gelte $\Phi(0+) = \infty$.

A.2 Φ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$ und wir definieren

$$I' := \{s \in I : \Phi \text{ ist differenzierbar in } s\}$$

und $h := \Phi' : I' \to \mathbb{R}$.

A.3 $(S, \mathcal{B}, \mu)$ ist Maßraum.

Im folgenden werden einige Notationen und Annahmen genutzt.

A.1 $\Phi : I \to \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_0^+$ oder $I = \mathbb{R}^+$, ist streng konvex und stetig. Falls $I = \mathbb{R}^+$ gelte $\Phi(0+) = \infty$.

A.2 Φ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$ und wir definieren

$$I' := \{s \in I : \Phi \text{ ist differenzierbar in } s\}$$

und $h := \Phi' : I' \to \mathbb{R}$.

A.3 $(S, \mathcal{B}, \mu)$ ist Maßraum.

Man erkennt: $\mathbb{R}^+ \subseteq I' \subseteq I \subseteq \mathbb{R}_0^+$ und falls $0 \notin I'$, gilt $\Phi(0+) = \infty$.

Im folgenden werden einige Notationen und Annahmen genutzt.

A.1 $\Phi : I \to \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_0^+$ oder $I = \mathbb{R}^+$, ist streng konvex und stetig. Falls $I = \mathbb{R}^+$ gelte $\Phi(0+) = \infty$.

A.2 Φ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$ und wir definieren

$$I' := \{s \in I : \Phi \text{ ist differenzierbar in } s\}$$

und $h := \Phi' : I' \to \mathbb{R}$.

A.3 $(S, \mathcal{B}, \mu)$ ist Maßraum.

Man erkennt: $\mathbb{R}^+ \subseteq I' \subseteq I \subseteq \mathbb{R}_0^+$ und falls $0 \notin I'$, gilt $\Phi(0+) = \infty$.

Weiter sei

$$\mathcal{C} := \{v \in L^1(S) : v(z) \in I \text{ für } \mu - \text{f.a. } z \in S\}$$
$$\mathcal{C}' := \{v \in L^1(s) : v(z) \in I' \text{ für } \mu - \text{f.a. } z \in S\}$$

Man erkennt direkt, dass $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \subseteq L^1_+(S)$ gilt.

Weiter sei

$$\mathcal{C} := \{v \in L^1(S) : v(z) \in I \text{ für } \mu - \text{f.a. } z \in S\}$$
$$\mathcal{C}' := \{v \in L^1(s) : v(z) \in I' \text{ für } \mu - \text{f.a. } z \in S\}$$

Man erkennt direkt, dass $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \subseteq L^1_+(S)$ gilt.
Da wir uns mit relativen Entropien in Bezug zu einer festen Referenzfunktion u_∞ beschäftigen werden, setzen wir voraus

A.4 $u_\infty \in \mathcal{C}'$ mit $\int_S u_\infty d\mu =: M \in \mathbb{R}^+$.

Weiter sei

$$\mathcal{C} := \{v \in L^1(S) : v(z) \in I \text{ für } \mu - \text{f.a. } z \in S\}$$
$$\mathcal{C}' := \{v \in L^1(s) : v(z) \in I' \text{ für } \mu - \text{f.a. } z \in S\}$$

Man erkennt direkt, dass $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \subseteq L^1_+(S)$ gilt.
Da wir uns mit relativen Entropien in Bezug zu einer festen Referenzfunktion u_∞ beschäftigen werden, setzen wir voraus

A.4 $u_\infty \in \mathcal{C}'$ mit $\int_S u_\infty d\mu =: M \in \mathbb{R}^+$.

Als (relatives) Entropiefunktional führen wir wie zuvor ein

$$E(.|.) : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\},$$
$$E(v|v^*) = \int_S (\Phi(v) - \Phi(v^*) - \Phi'(v^*)(v - v^*))d\mu$$

wobei wir feststellen, dass $E(v|v^*)$ auf Grund der Konvexität von Φ einen Wert im Intervall $[0, \infty]$ annimmt.

Zudem stellen wir fest, dass die Ableitung h von Φ streng wachsend ist.
Betrachten wir für $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty))$.
Man erkennt sofort, dass für $c \leq 0$ gilt $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \leq u_\infty$ und somit $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \in L^1_+(S)$.

Zudem stellen wir fest, dass die Ableitung h von Φ streng wachsend ist. Betrachten wir für $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty))$.
Man erkennt sofort, dass für $c \leq 0$ gilt $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \leq u_\infty$ und somit $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \in L^1_+(S)$.
Also Folge dessen erkennt man, dass

$$J := \{c \in \mathbb{R} : \bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \in L^1_+(S)\}$$

ein Intervall ist, welches die negative reelle Achse enthält. Für $c < \sup J$ defniert man

$$\mathrm{M}(c) := \int_S \bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) d\mu \in \mathbb{R}^+_0.$$

Zudem stellen wir fest, dass die Ableitung h von Φ streng wachsend ist.
Betrachten wir für $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty))$.
Man erkennt sofort, dass für $c \leq 0$ gilt $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \leq u_\infty$ und somit $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \in L^1_+(S)$.
Also Folge dessen erkennt man, dass

$$J := \{c \in \mathbb{R} : \bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \in L^1_+(S)\}$$

ein Intervall ist, welches die negative reelle Achse enthält. Für $c < \sup J$ defniert man

$$\mathsf{M}(c) := \int_S \bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) d\mu \in \mathbb{R}^+_0.$$

Schließlich setzt man

$$\bar{\mathsf{M}} := \sup_{c \in J} \mathsf{M}(c)$$

Zudem stellen wir fest, dass die Ableitung h von Φ streng wachsend ist.
Betrachten wir für $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty))$.
Man erkennt sofort, dass für $c \leq 0$ gilt $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \leq u_\infty$ und somit $\bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \in L^1_+(S)$.
Also Folge dessen erkennt man, dass

$$J := \{c \in \mathbb{R} : \bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) \in L^1_+(S)\}$$

ein Intervall ist, welches die negative reelle Achse enthält. Für $c < \sup J$ defniert man

$$\mathbf{M}(c) := \int_S \bar{h}^{-1}(c + \Phi'(u_\infty)) d\mu \in \mathbb{R}^+_0.$$

Schließlich setzt man

$$\bar{\mathbf{M}} := \sup_{c \in J} \mathbf{M}(c)$$

Wie bereits zuvor erkennt man, dass für jedes $N \in (0, \bar{\mathbf{M}})$ genau ein $c(N) \in J$ existiert, so dass $\int_S \bar{h}^{-1}(c(N) + \Phi'(u_\infty)) d\mu = N$ gilt und wir können deshalb definieren

$$u^*_N := \bar{h}^{-1}(c(N) + \Phi'(u_\infty)), N \in (u, \bar{\mathbf{M}}).$$

Somit ergeben sich einige Eigenschaften der Entropie:

Somit ergeben sich einige Eigenschaften der Entropie:

Proposition

Seien $A.1 - A.4$ vorausgesetzt. Sei $v \in \mathcal{C}$ und sei $v^* \in \mathcal{C}'$. Sei weiter vorausgesetzt

A. $[(\Phi'(u_\infty) - \Phi'(v^*))(v^* - v)]^- \in L^1(S)$

Dann gilt

$$E(v|v^*) + E(v^*|u_\infty) + \int_S (\Phi'(u_\infty) - \Phi'(v^*))(v^* - v)d\mu = E(v|u_\infty).$$

Somit ergeben sich einige Eigenschaften der Entropie:

Proposition

Seien $A.1 - A.4$ vorausgesetzt. Sei $v \in \mathcal{C}$ und sei $v^* \in \mathcal{C}'$. Sei weiter vorausgesetzt

A. $[(\Phi'(u_\infty) - \Phi'(v^*))(v^* - v)]^- \in L^1(S)$

Dann gilt

$$E(v|v^*) + E(v^*|u_\infty) + \int_S (\Phi'(u_\infty) - \Phi'(v^*))(v^* - v)d\mu = E(v|u_\infty).$$

Daraus ergibt sich

Lemma

Seien $A.1 - A.4$ vorausgesetzt. Sei $N \in (0, \overline{M})$. Dann gilt für alle $v \in \mathcal{C}$ mit $\int_S v d\mu = N$

$$E(v|u_N^*) + E(u_N^*|u_\infty) \leq E(v|u_\infty)$$

und insbesondere

$$E(u_N^*|u_\infty) \leq E(v|u_\infty)$$

Des weiteren zeigt man

Proposition

Seien $A.1 - A.4$ vorausgesetzt. Seien $v_1, v_2 \in \mathcal{C}$.
Falls $v_1 \leq v_2 \leq u_\infty$ μ-f.ü., so gilt $E(v_1|u_\infty) \geq E(v_2|u_\infty)$.

Nun noch einige Definitionen.
Für $\rho \in \mathbb{R}^+$ führen wir ein

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\rho &:= \left\{ v \in \mathcal{C} : \int_S v d\mu = \rho \right\} \\
R_\infty &:= \sup\{E(u|u_\infty) : u \in \mathcal{C}_M\} \\
\mathcal{C}_M^* &:= \{u \in \mathcal{C}_M : E(u|u_\infty) < R_\infty\} \\
S_\infty &:= \sup\{\|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} : u \in \mathcal{C}_M^+
\end{aligned}$$

Des weiteren zeigt man

Proposition

Seien $A.1 - A.4$ vorausgesetzt. Seien $v_1, v_2 \in \mathcal{C}$.
Falls $v_1 \leq v_2 \leq u_\infty$ μ-f.ü., so gilt $E(v_1|u_\infty) \geq E(v_2|u_\infty)$.

Nun noch einige Definitionen.
Für $\rho \in \mathbb{R}^+$ führen wir ein

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\rho &:= \left\{ v \in \mathcal{C} : \int_S v d\mu = \rho \right\} \\ R_\infty &:= \sup\{E(u|u_\infty) : u \in \mathcal{C}_M\} \\ \mathcal{C}_M^* &:= \{u \in \mathcal{C}_M : E(u|u_\infty) < R_\infty\} \\ S_\infty &:= \sup\{\|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} : u \in \mathcal{C}_M^+\} \end{aligned}$$

Um Trivialitäten zu vermeinden fordern wir weiterhin

(A.5) $R_\infty \neq 0$ und $\mathcal{C}_M^*$ enthält ein Element außer u_∞.

Schließlich bleibt noch festzustellen, dass die Abbildung

$$E(.|u_\infty) : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, u \mapsto E(u|u_\infty)$$

die Eigenschaften

$$\forall u \in \mathcal{C} : E(u|u_\infty) \geq 0 \text{ und } [E(u|u_\infty) = 0 \Leftrightarrow u = u_\infty]$$

erfüllt.

Theorem

Vorausgesetzt A.1-A.5. Dann gibt es eine Funktion

$$\mathrm{U} : \mathbb{R}_0^+ \to [0, 2M)$$

so dass

1. $\mathrm{U}(0) = 0$
2. U *ist stetig in* 0, *d.h.* $\lim_{\phi \to 0+} \mathrm{U}(\phi) = 0$.
3. U *ist wachsend.*
4. *Für alle* $u \in \mathcal{C}_M$ *mit* $E(u|u_\infty) < \infty$, *gibt es eine Csiszár-Kullback-artige Ungleichung*
$$\|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} \leq \mathrm{U}(E(u|u_\infty)).$$

Der Beweis erfolgt nach mehreren vorbereitenden Schritten.

Schritt 1: Die Ungleichung wird aus einer Abschätzung mit einer Funktion H folgen, deren verallgemeinertes Inverses U ist.

Definition

Sei $\mathrm{H} : (0, S_\infty) \to \mathbb{R}^+$ wachsend. Dann ist das verallgemeinerte Inverse H^{-*} von H definiert durch

$$\mathrm{H}^{-*} : \mathbb{R}_0^+ \to [0, 2M],$$

$$\mathrm{H}^{-*}(\sigma) = \begin{cases} 0, 0 \leq \sigma < \mathrm{H}(0) \\ \sup\{s \in (0, S_\infty) : \mathrm{H}(s) \leq \sigma\}, \mathrm{H}(0) \leq \sigma \leq \mathrm{H}(S_\infty) \\ S_\infty, \mathrm{H}(S_\infty) < \sigma \end{cases}$$

wobei

$$\mathrm{H}(0) := \lim_{s \to 0} \mathrm{H}(s) = \inf \mathrm{H} \in \mathbb{R}_0^+,$$

$$\mathrm{H}(S_\infty) := \lim_{s \to S_\infty} \mathrm{H}(s) = \sup \mathrm{H} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Lemma

Sei $\mathrm{H} : (0, S_\infty) \to \mathbb{R}^+$ *wachsend. Dann gilt:*

1. H^{-*} *ist wachsend und* $\mathrm{H}^{-*}(0) = 0$.
2. *Für alle* $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$ *und alle* $s \in (0, S_\infty)$*: Wenn* $\mathrm{H}(s) \leq \sigma$*, dann* $s \leq \mathrm{H}^{-*}(\sigma)$.
3. H^{-*} *ist stetig in* 0*, d.h.* $\lim_{\sigma\to 0+} \mathrm{H}^{-*}(\sigma) = 0$.

Schritt 2: Mit Hilfe des verallgemeinerten Inversen kann man die Aussage des Theorems wie folgt umformulieren.

Lemma

Vorausgesetzt A.1-A.5. Sei $\mathrm{H} : (0, S_\infty) \to \mathbb{R}^+$ *so, dass*

1. H *ist wachsend.*
2. *Für alle* $u \in \mathcal{C}_M^*$ *gilt:*

$$\textit{Falls } \|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} \in (0, S_\infty), \qquad \textit{dann } \mathrm{H}(\|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)}) \leq E(u|u_\infty)$$

Dann gilt:

1. $\mathrm{H}^{-*}(0) = 0$.
2. H^{-*} *ist stetig in 0, d.h.* $\lim_{\sigma \to 0+} \mathrm{H}^{-*}(\sigma) = 0$.
3. H^{-*} *ist wachsend.*
4. *Für alle* $u \in \mathcal{C}_M$ *mit* $E(u|u_\infty) < \infty$ *gilt eine Csiszár-Kullback-artige Ungleichung*

$$\|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} \leq \mathrm{H}^{-*}(E(u|u_\infty))$$

Schritt 3: Es genügt nun, eine Funktion zu finden, welche den Anforderungen des vorherigen Lemmas genügt. Dies erfolgt im folgenden Lemma durch Lösen eines Minimierungsproblems.

Lemma

Vorausgesetzt A.1-A.5. Sei

$$A_\circ : (0,1) \to \mathbb{R}^+$$

so, dass

1. *$A_\circ$ ist fallend.*
2. *Für alle $\theta \in (0,1)$ gilt:*

$$A_\circ(\theta) \leq \inf\{E(v|u_\infty) : v \in C_{\theta M}, v(z) \leq u_\infty(z) \text{ für } \mu \text{ f. a. } z \in S\}.$$

Lemma

Dann besitzt die Funktion

$$\mathrm{H}_\circ : (0, S_\infty) \to \mathbb{R}^+, \mathrm{H}_\circ(\sigma) := A_\circ \left(1 - \frac{\sigma}{2M}\right)$$

die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathrm{H}_\circ$ *ist wachsend.*
2. *Für alle* $u \in \mathrm{C}_M^*$ *gilt:*

$$\text{Falls } \|u - u_\infty|_{L^1(d\mu)} \in (0, S_\infty), \qquad \text{dann } \mathrm{H}_\circ(\|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)}) \le E(u|u_\infty).$$

Beweis: a. ist klar.
b. Sei $u \in \mathcal{C}^*$ mit $0 < \|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} < S_\infty$.
Wir setzen $\theta := \frac{1}{M} \int_S [u - u_\infty]^- d\mu$.

Beweis: a. ist klar.
b. Sei $u \in \mathcal{C}^*$ mit $0 < \|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} < S_\infty$.
Wir setzen $\theta := \frac{1}{M} \int_S [u - u_\infty]^- d\mu$.
Aus $\int_S u d\mu = \int_s u_\infty d\mu = M$ folgt

$$0 = \int_S u - u_\infty d\mu = \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu - \int_S [u - u_\infty]^- d\mu$$

$$\Rightarrow \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu = \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu$$

Beweis: a. ist klar.
b. Sei $u \in \mathcal{C}^*$ mit $0 < \|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} < S_\infty$.
Wir setzen $\theta := \frac{1}{M} \int_S [u - u_\infty]^- d\mu$.
Aus $\int_S u d\mu = \int_s u_\infty d\mu = M$ folgt

$$0 = \int_S u - u_\infty d\mu = \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu - \int_S [u - u_\infty]^- d\mu$$
$$\Rightarrow \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu = \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu$$

Somit erhält man

$$\|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} = \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu + \int_S [u - u_\infty]^- d\mu = 2M\theta$$

Somit gilt $\theta \in]0, 1[$.

Beweis: a. ist klar.
b. Sei $u \in \mathcal{C}^*$ mit $0 < \|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} < S_\infty$.
Wir setzen $\theta := \frac{1}{M} \int_S [u - u_\infty]^- d\mu$.
Aus $\int_S u d\mu = \int_s u_\infty d\mu = M$ folgt

$$0 = \int_S u - u_\infty d\mu = \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu - \int_S [u - u_\infty]^- d\mu$$
$$\Rightarrow \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu = \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu$$

Somit erhält man

$$\|u - u_\infty\|_{L^1(d\mu)} = \int_S [u - u_\infty]^+ d\mu + \int_S [u - u_\infty]^- d\mu = 2M\theta$$

Somit gilt $\theta \in]0, 1[$.
Sei weiter $S^+ := \{z \in S : u(z) > u_\infty(z)\}$. Wir setzen $\alpha := \int_{S \setminus S^+} u d\mu$.

Nun zeigt man $\int_{S^+} = (1-\theta)M - \alpha$, denn

$$\begin{aligned}
(1-\theta)M &= M - \int_S [u - u_\infty]^- \, d\mu \\
&= M - \int_S [u_\infty - u]^+ \, d\mu \\
&= M - \int_{S \setminus S^+} (u_\infty - u) d\mu \\
&= M - \int_{S \setminus S^+} u_\infty d\mu + \int_{S \setminus S^+} u d\mu \\
&= \int_{S^+} u_\infty d\mu + \alpha
\end{aligned}$$

Nun zeigt man $\int_{S^+} = (1-\theta)M - \alpha$, denn

$$
\begin{aligned}
(1-\theta)M &= M - \int_S [u - u_\infty]^- \, d\mu \\
&= M - \int_S [u_\infty - u]^+ \, d\mu \\
&= M - \int_{S \setminus S^+} (u_\infty - u) d\mu \\
&= M - \int_{S \setminus S^+} u_\infty d\mu + \int_{S \setminus S^+} u d\mu \\
&= \int_{S^+} u_\infty d\mu + \alpha
\end{aligned}
$$

und

$$
E(u|u_\infty) = \int_S \Phi(u|u_\infty) d\mu = \int_{S \setminus S^+} \Phi(u|u_\infty) d\mu + \int_{S^+} \Phi(u|u_\infty) d\mu
$$

$$
\geq \int_{S \setminus S^+} \Phi(u|u_\infty) d\mu
$$

$$\geq \inf\{\int_{S\backslash S^+} \Phi(u|u_\infty)d\mu : v \in \mathcal{C}, V(z) \leq u_\infty(z) \text{ für } \mu\text{-f.a. } z \in S\backslash S^+,$$

$$und \int_{S\backslash S^+} v d\mu = \alpha\}$$

$$= \inf\{\int_{S\backslash S^+} \Phi(u|u_\infty)d\mu : v \in \mathcal{C}, V(z) \leq u_\infty(z) \text{ für } \mu\text{-f.a. } z \in S\backslash S^+,$$

$$\text{und } v(z) = u_\infty(z) \text{ für } \mu\text{-f.a. } z \in S^+, \int_S v d\mu = \alpha + \int_{S^+} u_\infty d\mu\}$$

$$= \inf\{E(v|u_\infty) : v \in \mathcal{C}, V(z) \leq u_\infty(z) \text{ für } \mu\text{-f.a. } z \in S\backslash S^+,$$

$$\text{und } v(z) = u_\infty(z) \text{ für } \mu\text{-f.a. } z \in S^+, \int_S v d\mu = (1-\theta)M\}$$

$$\geq \inf\left\{E(V|u_\infty) : v \in \mathcal{C}_{(1-\theta)M}, v(z) \leq u_\infty(z) \text{ für } \mu\text{-f.a. } z \in S\right\}$$

$$= A_\circ(1-\theta) = A_\circ\left(1 - \frac{\|u-u_\infty\|_{L^1(d\mu)}}{2M}\right) = H_\circ(\|u-u_\infty\|_{L^1(d\mu)})$$

Schritt 4: Nun genügt es eine Funktion $A_\circ$ zu finden, die die geforderten Eigenschaften besitzt.

Schritt 4: Nun genügt es eine Funktion $A_\circ$ zu finden, die die geforderten Eigenschaften besitzt.

Lemma

Vorausgesetzt A.1-A.5. Dann ist die Funktion

$$A_\circ : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, A_\circ(\theta) = \inf_{\mathsf{C}_{\theta M}} E(.|u_\infty)$$

fallend.

Schritt 4: Nun genügt es eine Funktion $A_\circ$ zu finden, die die geforderten Eigenschaften besitzt.

Lemma

Vorausgesetzt A.1-A.5. Dann ist die Funktion

$$A_\circ : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, A_\circ(\theta) = \inf_{C_{\theta M}} E(.|u_\infty)$$

fallend.

Man kann nun etwa für $\Phi(t) = t(\log(t) - 1)$, $u_\infty = 1$ und $\mu(S) = 1$ zeigen, dass

$$\|u - 1\|_{L^1(d\mu)} \leq \sqrt{4 \int_S u \log(u) d\mu}$$

Danke für die Aufmerksamkeit!