Langzeitverhalten von Diffusionsgleichungen

Claudia Denecke

10. November 2008

- nichtlineare Fokker-Planck-Gleichung
  - stationäre Lösung
  - Gleichgewichtslösung
  - Existenz und Eindeutigkeit der Gleichgewichtslösung
  - zeitabhängige Skalierung

- nichtlineare Fokker-Planck-Gleichung
  - stationäre Lösung
  - Gleichgewichtslösung
  - Existenz und Eindeutigkeit der Gleichgewichtslösung
  - zeitabhängige Skalierung
- lineare Fokker-Planck Gleichung
  - Entropie
  - Energie
  - Entropie- und Energieabschätzungen

- nichtlineare Fokker-Planck-Gleichung
  - stationäre Lösung
  - Gleichgewichtslösung
  - Existenz und Eindeutigkeit der Gleichgewichtslösung
  - zeitabhängige Skalierung
- lineare Fokker-Planck Gleichung
  - Entropie
  - Energie
  - Entropie- und Energieabschätzungen
- Poröse Medien-/schnelle Diffusionsgleichung
  - Entropie
  - Entropieabschätzungen

- nichtlineare Fokker-Planck-Gleichung
  - stationäre Lösung
  - Gleichgewichtslösung
  - Existenz und Eindeutigkeit der Gleichgewichtslösung
  - zeitabhängige Skalierung
- lineare Fokker-Planck Gleichung
  - Entropie
  - Energie
  - Entropie- und Energieabschätzungen
- Poröse Medien-/schnelle Diffusionsgleichung
  - Entropie
  - Entropieabschätzungen
- nichtlineare Diffusionsgleichung 4.Ordnung
  - Entropieabschätzungen
  - Fazit

Problemstellung

nichtlineare Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{du}{dt} = div(u \nabla V(x) + \nabla f(u)) \text{ mit } x \in \Omega,\ t > 0$$

mit Angangsbedingung $u_0(x) \geq 0$
$\Omega = \mathbb{R}^d$: Zerfallsbedingung bei $|x| = \infty$
Ω begrenzt: kein-Ausfluss-Bedingung auf $\partial\Omega$

Problemstellung - Voraussetzung an Ω

nichtlineare Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{du}{dt} = div(u\nabla V(x) + \nabla f(u)) \text{ mit } x \in \Omega,\ t > 0$$

mit Angangsbedingung $u_0(x) \geq 0$
$\Omega = \mathbb{R}^d$: Zerfallsbedingung bei $|x| = \infty$
Ω begrenzt: kein-Ausfluss-Bedingung auf $\partial\Omega$

(HD1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ glattes, beschränktes Gebiet oder $\Omega = \mathbb{R}^d$
(HD2) $u_0 \in L^1(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ und $\int_\Omega u_0(x)dx =: M \in (0, \infty)$

Problemstellung - Voraussetzungen an V

nichtlineare Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{du}{dt} = div(u \nabla V(x) + \nabla f(u)) \text{ mit } x \in \Omega,\ t > 0$$

mit Angangsbedingung $u_0(x) \geq 0$
$\Omega = \mathbb{R}^d$: Zerfallsbedingung bei $|x| = \infty$
Ω begrenzt: kein-Ausfluss-Bedingung auf $\partial\Omega$

(HV1) $\Omega = \mathbb{R}^d$: $V \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ und Ω begrenzt: $V \in W^{1,1}(\Omega)$
(HV2) $\Omega = \mathbb{R}^d$: $\forall A \in \mathbb{R} : \{x | V(x) \leq A\}$ ist begrenzt
(HV3) $inf_\Omega V = 0$

Problemstellung - Voraussetzungen an f

nichtlineare Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{du}{dt} = div(u\nabla V(x) + \nabla f(u)) \text{ mit } x \in \Omega,\ t > 0$$

mit Angangsbedingung $u_0(x) \geq 0$
$\Omega = \mathbb{R}^d$: Zerfallsbedingung bei $|x| = \infty$
Ω begrenzt: kein-Ausfluss-Bedingung auf $\partial\Omega$

(HF1) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ist kontinuierlich, strikt steigend und $f(0) = 0$

(HF2) $f|_{\mathbb{R}^+} \in C^3(\mathbb{R}^+)$

(HF3) $h \in L^1_{loc}([0,\infty))$ mit $h(u) := \int_1^u \frac{f'(s)}{s} ds,\ u \in (0,\infty)$
$\Phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\Phi(u) = \int_0^u h(s)ds$ ist wohldefiniert mit
$\Phi'(u) = h(u) \forall u \in \mathbb{R}^+$

stationäre Lösung

veränderte Ausgangsgleichung für stationäre Lösungen

$$u\nabla V(x) + \nabla f(u) = 0 \qquad \text{mit } \int_\Omega u dx = M$$

stationäre Lösung

veränderte Ausgangsgleichung für stationäre Lösungen

$$\begin{aligned} u\nabla V(x) + \nabla f(u) &= 0 && \text{mit } \int_\Omega u dx = M \\ V(x) + h(u(x)) &= C && \forall x \in \Omega \text{ für manche } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla f(u) = u\nabla h(u) \\ \Leftrightarrow \quad & f'(u)\nabla u = uh'\nabla u \\ \Leftrightarrow \quad & h'(u) = \frac{f'(u)}{u} \end{aligned}$$

(HF3) $h \in L^1_{loc}([0,\infty))$ mit $h(u) := \int_1^u \frac{f'(s)}{s} ds,\ u \in (0,\infty)$

stationäre Lösung

veränderte Ausgangsgleichung für stationäre Lösungen

$$u\nabla V(x) + \nabla f(u) = 0 \qquad \text{mit } \int_\Omega u dx = M$$
$$V(x) + h(u(x)) = C \qquad \forall x \in \Omega \text{ für manche } C \in \mathbb{R}$$

(HF1) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ist kontinuierlich, strikt steigend und $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ h strikt wachsend und $h : (0, \infty) \to (h(0+), h(\infty))$
mit $-\infty \leq h(0+) < 0 < h(\infty) \leq \infty$

$\Rightarrow$ $C - V \in (h(0+), h(\infty))$: $u(x) = h^{-1}(C - V(x))$
mit $h^{-1} : (h(0+), (h(\infty))) \to (0, \infty)$

Energie

Definition der Energie

(HD1),(HF1)-(HF3),
sei $V : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und nicht-negativ,
$E : L^1_+(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$E(u) = \begin{cases} \int_\Omega (Vu + \Phi^+(u))(x)dx - \int_\Omega \Phi^-(u(x))dx, & \Phi^-(u) \in L^1(\Omega) \\ \infty, & sonst \end{cases}$$

mit $L^1_+(\Omega) = \left\{u \in L^1(\Omega) : u \geq 0\right\}$

Energie

Definition der Energie

(HD1),(HF1)-(HF3),
sei $V : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und nicht-negativ,
$E : L^1_+(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$E(u) = \begin{cases} \int_\Omega (Vu + \Phi^+(u))(x)dx - \int_\Omega \Phi^-(u(x))dx, & \Phi^-(u) \in L^1(\Omega) \\ \infty, & sonst \end{cases}$$

mit $L^1_+(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) : u \geq 0 \right\}$

$E(u) < \infty \Leftrightarrow Vu \in L^1(\Omega)$ und $\Phi(u) \in L^1(\Omega)$
$\Rightarrow E(u) = \int_\Omega (Vu + \Phi(u))dx$

Gleichgewichtslösung

Definition der Gleichgewichtslösung

(HD1), (HV1)-(HV3),(HF1)-(HF3).
Eine Funktion $u_{\infty,M} \in L^1(\Omega)$ ist eine Gleichgewichtslösung

$$\Leftrightarrow$$

$u_{\infty,M}$ ist ein Minimierer von E in $\tilde{C} := \left\{u \in L^1_+(\Omega) : \int_\Omega u(x)dx = M\right\}$

HV4

HV4

$$\Omega = \mathbb{R}^d,\ h(0+) = -\infty\text{: } \exists C \in \mathbb{R} \text{ mit } U(x, C) \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

Begründung:

- $U(x, C) := \bar{h}^{-1}(C - V(x))$ mit $\bar{h}^{-1} : \mathbb{R} \to [0, \infty]$,

$$\bar{h}^{-1}(\sigma) = \begin{cases} 0 & , \sigma \leq h(0+) \\ h^{-1}(\sigma) & , h(0+) < \sigma < h(\infty) \\ \infty & , h(\infty) \leq \sigma \end{cases}$$

- $0 \leq U(x, C) \leq \infty$
- $M(C) := \int_\Omega U(x, C) dx \in [0, \infty]$

HV5 Teil 1

$M : C \to M(C)$, $C^* := sup\left\{C \in \mathbb{R} : U(x, C) \in L^1(\Omega)\right\}$
Ω begrenzt oder $h(0+) > -\infty$: $C^* \in (h(0+), h(\infty)]$ und $C^* = h(\infty)$

- M ist wachsend
- $lim_{C\to-\infty} M(C) = 0, \quad lim_{C\to\infty} M(C) = \infty$
- $M(C) = 0 \quad \forall C \in (-\infty, h(0+)]$
- $M(C) = \infty \quad \forall C \in (C^*, \infty)$
- M ist kontinuierlich und strikt wachsend auf $(h(0+), C^*)$
- $h(0+) \in \mathbb{R}$: M kontinuierlich bei $h(0+)$ mit $M(h(0+)) = 0$

$\bar{M} = lim_{C\to C^*} M(C)$

HV5 Teil 2

Fallunterscheidung:

- $h(0+) = -\infty$ und $h(\infty) = \infty$:
  $\bar{h}^{-1} = h^{-1}$, $\bar{M} = \infty$, $\exists \bar{C} \in (h(0+), C^*)$
- $-\infty < h(0+)$ und $h(\infty) = \infty$:
  $\bar{M} = \infty$, $\exists \bar{C} \in (h(0+), h(\infty))$
- $h(0+) = -\infty$ und $h(\infty) < \infty$:
  wenn $\bar{M} > M$ $\exists \bar{C} \in (-\infty, C^*)$
- $-\infty < h(0+)$ und $h(\infty) < \infty$:
  wenn $0 < M < \bar{M}$

mit $M(\bar{C}) = M$, $u_{\infty,M} := U(x, \bar{C})$

HV5

$$M < \bar{M}(\Omega) = lim_{C \to C^*} M(C)$$

Relative Entropie

Definition der relativen Entropie

$E(.|u_{\infty,M}) : L^1_+(\Omega) \to [0,\infty]$

$E(u|u_{\infty,M}) = \int_\Omega (\Phi(u) - \Phi(u_{\infty,M}) - \Phi'(u_{\infty,M})(u - u_{\infty,M}))(x)dx$

Relative Entropie

Definition der relativen Entropie

$E(.|u_{\infty,M}) : L^1_+(\Omega) \to [0,\infty]$
$E(u|u_{\infty,M}) = \int_\Omega (\Phi(u) - \Phi(u_{\infty,M}) - \Phi'(u_{\infty,M})(u - u_{\infty,M}))(x)dx$

Satz

(HD1), (HV1)-(HV5), (HF1)-(HF3), $E(u_{\infty,M}) < \infty$.
Dann gilt: $\forall u \in C$: $E(u) - E(u_{\infty,M}) \geq E(u|u_{\infty,M})$
Gleichheit: $\forall u \in C \Leftrightarrow V(x) + h(u_{\infty,M}(x)) = C$ für fast alle $x \in \Omega$

Beweis des Satzes Teil 1

setze $\tilde{u} := u_{\infty,M}$
$E(u) < \infty, E(\tilde{u}) < \infty$ und $E(u|\tilde{u}) < \infty$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\begin{aligned} V + h(\tilde{u}) &= C \quad &\text{für} \quad \tilde{u} > 0 \\ V + h(0+) &\geq C \quad &\text{für} \quad \tilde{u} = 0 \end{aligned}$$

Beweis des Satzes Teil 1

setze $\tilde{u} := u_{\infty,M}$
$E(u) < \infty, E(\tilde{u}) < \infty$ und $E(u|\tilde{u}) < \infty$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\begin{aligned} V + h(\tilde{u}) &= C \quad &\text{für} \quad \tilde{u} > 0 \\ V + h(0+) &\geq C \quad &\text{für} \quad \tilde{u} = 0 \end{aligned}$$

$$E(u) - E(\tilde{u}) - E(u|\tilde{u})$$

Beweis des Satzes Teil 1

setze $\tilde{u} := u_{\infty,M}$
$E(u) < \infty, E(\tilde{u}) < \infty$ und $E(u|\tilde{u}) < \infty$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\begin{array}{lll} V + h(\tilde{u}) = C & \text{für} & \tilde{u} > 0 \\ V + h(0+) \geq C & \text{für} & \tilde{u} = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & E(u) - E(\tilde{u}) - E(u|\tilde{u}) \\ = & \int_\Omega Vu + \Phi(u) - V\tilde{u} - \Phi(\tilde{u}) - (\Phi(u) + \Phi(\tilde{u}) + \Phi^{'}(\tilde{u})(u - \tilde{u}))dx \end{aligned}$$

Beweis des Satzes Teil 1

setze $\tilde{u} := u_{\infty,M}$
$E(u) < \infty, E(\tilde{u}) < \infty$ und $E(u|\tilde{u}) < \infty$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\begin{array}{lll} V + h(\tilde{u}) = C & \text{für} & \tilde{u} > 0 \\ V + h(0+) \geq C & \text{für} & \tilde{u} = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & E(u) - E(\tilde{u}) - E(u|\tilde{u}) \\ = & \int_\Omega Vu + \Phi(u) - V\tilde{u} - \Phi(\tilde{u}) - (\Phi(u) + \Phi(\tilde{u}) + \Phi^{'}(\tilde{u})(u - \tilde{u}))dx \\ = & \int_\Omega (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \end{aligned}$$

Beweis des Satzes Teil 2

$$= \int_\Omega (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx$$

Beweis des Satzes Teil 2

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u}) dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u}) dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u}) dx
\end{aligned}
$$

Beweis des Satzes Teil 2

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} C(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u)dx
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes Teil 2

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} C(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u)dx \\
&\geq C \int_{\tilde{u}>0} (u - \tilde{u})dx + C \int_{\tilde{u}=0} (u)dx
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes Teil 2

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} C(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u)dx \\
&\geq C \int_{\tilde{u}>0} (u - \tilde{u})dx + C \int_{\tilde{u}=0} (u)dx \\
&= C \int_{\tilde{u}>0} (u - \tilde{u})dx + C \int_{\tilde{u}=0} (u - \tilde{u})dx
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes Teil 2

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} C(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u)dx \\
&\geq C\int_{\tilde{u}>0} (u - \tilde{u})dx + C\int_{\tilde{u}=0} (u)dx \\
&= C\int_{\tilde{u}>0} (u - \tilde{u})dx + C\int_{\tilde{u}=0} (u - \tilde{u})dx \\
&= C\int_\Omega (u - \tilde{u})dx
\end{aligned}
$$

Beweis des Satzes Teil 2

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u - \tilde{u})dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} C(u - \tilde{u})dx + \int_{\tilde{u}=0} (V + h(\tilde{u}))(u)dx \\
&\geq C\int_{\tilde{u}>0} (u - \tilde{u})dx + C\int_{\tilde{u}=0} (u)dx \\
&= C\int_{\tilde{u}>0} (u - \tilde{u})dx + C\int_{\tilde{u}=0} (u - \tilde{u})dx \\
&= C\int_\Omega (u - \tilde{u})dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

HV6

HV6

$$\Omega = \mathbb{R}^d\text{: } E(u_{\infty,\mu}) < \infty \text{ für } \mu \in (0, \bar{M})$$

Eindeutigkeit

Satz

(HD1), (HV1)-(HV6), (HF1)-(HF3).
$u_{\infty,M}$ ist der einzige Minimierer von E auf C und per Definition die Gleichgewichtslösung.

(HV4) $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $h(0+) = -\infty$: $\exists C \in \mathbb{R}$ mit $U(x, C) \in L^1(\mathbb{R}^d)$
(HV5) $M < \bar{M}(\Omega) = lim_{C \to C^*} M(C)$
(HV6) $\Omega = \mathbb{R}^d$: $E(u_{\infty,\mu}) < \infty$ für $\mu \in (0, \bar{M})$

Eindeutigkeit

Satz

(HD1), (HV1)-(HV6), (HF1)-(HF3).
$u_{\infty,M}$ ist der einzige Minimierer von E auf C und per Definition die Gleichgewichtslösung.

Beweis:

- E ist strikt konvex $\Rightarrow \exists$ Minimierer von E auf C

Eindeutigkeit

Satz

(HD1), (HV1)-(HV6), (HF1)-(HF3).
$u_{\infty,M}$ ist der einzige Minimierer von E auf C und per Definition die Gleichgewichtslösung.

Beweis:

- E ist strikt konvex $\Rightarrow \exists$ Minimierer von E auf C
- zu zeigen: $E(u_{\infty,M}) \leq E(u) \; \forall u \in \tilde{C}$

Eindeutigkeit

Satz

(HD1), (HV1)-(HV6), (HF1)-(HF3).
$u_{\infty,M}$ ist der einzige Minimierer von E auf C und per Definition die Gleichgewichtslösung.

Beweis:

- E ist strikt konvex $\Rightarrow \exists$ Minimierer von E auf C
- zu zeigen: $E(u_{\infty,M}) \leq E(u)\ \forall u \in \tilde{C}$
- $E(u) < \infty$

Eindeutigkeit

Satz

(HD1), (HV1)-(HV6), (HF1)-(HF3).
$u_{\infty,M}$ ist der einzige Minimierer von E auf C und per Definition die Gleichgewichtslösung.

Beweis:

- E ist strikt konvex $\Rightarrow \exists$ Minimierer von E auf C
- zu zeigen: $E(u_{\infty,M}) \leq E(u)\ \forall u \in \tilde{C}$
- $E(u) < \infty$
- $E(u) \geq E(u|u_{\infty,M}) + E(u_{\infty,M})$

zeitabhängige Skalierung

zeitabhängige Skalierung auf $\Omega = \mathbb{R}^d$

f' homogen vom Grad r mit $dr + 2 > 0$, dann $\exists$

$$v(x,t) = \alpha(t)^N u(\alpha(t)x, \beta(t))$$

mit $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$ und $\beta(t) \to \infty$ für $t \to \infty$
$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta f(v)$ mit (x in $\mathbb{R}^d$ und $t > 0$)

zeitabhängige Skalierung

zeitabhängige Skalierung auf $\Omega = \mathbb{R}^d$

f' homogen vom Grad r mit $dr + 2 > 0$, dann $\exists$

$$v(x,t) = \alpha(t)^N u(\alpha(t)x, \beta(t))$$

mit $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$ und $\beta(t) \to \infty$ für $t \to \infty$
$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta f(v)$ mit (x in $\mathbb{R}^d$ und $t > 0$)

z.B. $\alpha(t) = (2t+1)^{-1/2}$, $\beta(t) = -log(\alpha(t))$ und $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$
transponiert $\frac{du}{dt} = div(u\nabla V(x) + f(u))$ mit $(x \in \Omega,\ t > 0)$
$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha(t)^{d-2}\beta'(t)\Delta f(\alpha(t)^{-d}v)$ mit $(x \in \mathbb{R}^d, t > 0)$
mit $w = \alpha(t)^{-d}v$
$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{d}{2t+1}w + \Delta f(w)$ mit $(x \in \mathbb{R}^d, t > 0)$

Problemstellung

lineare Fokker-Planck Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \nabla(xu),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

mit Anfgangsbedingung u_0 z.B. $\in C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1_+(\mathbb{R}^n)$

Problemstellung

lineare Fokker-Planck Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \nabla(xu),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

mit Anfangsbedingung u_0 z.B. $\in C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1_+(\mathbb{R}^n)$

$H^1_+(S^1) :=$ nicht-negative, 1-periodische Funktionen im Raum der messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung in $L^2_{loc}(\mathbb{R})$
$S^1 = [0, 1)$
Lebesque's Maß $\int_{S^1} dx = 1$
$v = \frac{u}{u_\infty}$

Problemstellung

lineare Fokker-Planck Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \nabla(xu),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

mit Anfangsbedingung u_0 z.B. $\in C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1_+(\mathbb{R}^n)$

$H^1_+(S^1) :=$ nicht-negative, 1-periodische Funktionen im Raum der messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung in $L^2_{loc}(\mathbb{R})$
$S^1 = [0, 1)$
Lebesque's Maß $\int_{S^1} dx = 1$
$v = \frac{u}{u_\infty}$

Durchschnitte

$$\mu_p[v] := (\int_{S^1} v^{1/p} dx)^p \text{ und } \bar{v} := \int_{S^1} v dx$$

mit $\bar{v} = \mu_1[v]$

Entropie

Definition der Entropie

$\left\{v \in H^1_+(S^1) : v \neq 0 a.e.\right\}$, $p \in (0, +\infty)$ und $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{p,q}[v] := \frac{1}{pq(pq-1)}[\int_{S^1} v^q dx - (\mu_p[v])^q] \quad \text{für} \quad pq \neq 1 \text{und} q \neq 0$$

$$\sum_{1/q,q}[v] := \int_{S^1} v^q log(\frac{v^q}{\int_{S^1} v^q dx})dx \quad \text{für} \quad pq = 1 \text{und} q \neq 0$$

$$\sum_{p,0}[v] := -\frac{1}{p}\int_{S^1} log(\frac{v}{\mu_p[v]})dx \quad \text{für} \quad q = 0$$

Entropie

Definition der Entropie

$\left\{v \in H^1_+(S^1) : v \neq 0 a.e.\right\}$, $p \in (0, +\infty)$ und $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{p,q}[v] := \frac{1}{pq(pq-1)}\left[\int_{S^1} v^q dx - (\mu_p[v])^q\right] \quad \text{für} \quad pq \neq 1 \text{und} q \neq 0$$

$$\sum_{1/q,q}[v] := \int_{S^1} v^q log\left(\frac{v^q}{\int_{S^1} v^q dx}\right)dx \quad \text{für} \quad pq = 1 \text{und} q \neq 0$$

$$\sum_{p,0}[v] := -\frac{1}{p}\int_{S^1} log\left(\frac{v}{\mu_p[v]}\right)dx \quad \text{für} \quad q = 0$$

Eigenschaften der Entropie

- nicht negativ $\forall p \in (0, +\infty)$ und $q \in \mathbb{R}$
- strikte Konvexität: Entropie $= 0 \Leftrightarrow v = \mu_p[v]$

Energie

Definition der Energie

Energie-Funktional für Gleichungen zweiter Ordnung:

$$J_1[v] := \int_{S_1} \left| v^{'} \right|^2 dx \ \forall v \in H^1(S^1)$$

Energie-Funktional für Gleichungen vierter Ordnung:

$$J_2[v] := \int_{S_1} \left| v^{''} \right|^2 dx \ \forall v \in H^2(S^1)$$

1.Abschätzung

Satz

$\forall p \in (0, +\infty)$ und $q \in (0, 2)$ $\exists$ eine Konstante $\kappa_{p,q}$, so dass $\forall v \in H_+^1(S^1)$ gilt:

$$\sum_{p,q}[v]^{2/q} \leq \frac{1}{\kappa_{p,q}} J_1[v]$$

in anderen Worten: $\kappa_{p,q} := inf_{v \in H_+^1(S^1), v \neq \mu_p[v] a.e.} \frac{J_1[v]}{\sum_{p,q}[v]^{2/q}} > 0$

1.Abschätzung

Satz

$\forall p \in (0, +\infty)$ und $q \in (0, 2)$ $\exists$ eine Konstante $\kappa_{p,q}$, so dass $\forall v \in H^1_+(S^1)$ gilt:

$$\sum_{p,q}[v]^{2/q} \leq \frac{1}{\kappa_{p,q}} J_1[v]$$

in anderen Worten: $\kappa_{p,q} := inf_{v \in H^1_+(S^1), v \neq \mu_p[v] a.e.} \frac{J_1[v]}{\sum_{p,q}[v]^{2/q}} > 0$

Beweis mit Methoden aus der Analysis (Folgen, Grenzwerte)
wichtigste Abschätzung: $\|v\|_{L^\infty(S^1)} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} J_1[v]^{1/2}$

2.Abschätzung

Satz

$\forall p \in (0, +\infty)$ und $q \in (0, 2)$ und $pq \neq 1$ gilt:

$$\sum_{p,q}[v]^{2/q} \leq \frac{1}{4\pi^2 \kappa_{p,q}} J_2[v] \; \forall v \in H^2_+(S^1)$$

2.Abschätzung

Satz

$\forall p \in (0, +\infty)$ und $q \in (0, 2)$ und $pq \neq 1$ gilt:

$$\sum_{p,q}[v]^{2/q} \leq \frac{1}{4\pi^2 \kappa_{p,q}} J_2[v] \ \forall v \in H^2_+(S^1)$$

Beweis:
folgt aus der 1.Abschätzung mit der Poincare Gleichung
$(2\pi)^2 \|v - \bar{v}\|^2_{L^2(S^1)} \leq J_1[v]$ mit $\bar{v}' = 0$
$(\Rightarrow J_1[v] \leq (2\pi)^{-2} J_2[v])$

Lineare Abschätzungen

Einschränkung: $\chi_\epsilon^{p,q} := \left\{ v \in H_+^1(S^1) : \sum_{p,q}[v] \leq \epsilon \quad \text{und} \quad \mu_p[v] = 1 \right\}$

Satz

$\forall p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ und $\epsilon_0 > 0$ $\exists$ eine positive Konstante C, so dass $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$ gilt:

$$\sum_{p,q}[v] \leq \frac{1 + C\sqrt{\epsilon}}{8p^2\pi^2} J_1[v] \ \forall v \in \chi_\epsilon^{p,q}$$

Lineare Abschätzungen

Einschränkung: $\chi_\epsilon^{p,q} := \left\{ v \in H^1_+(S^1) : \sum_{p,q}[v] \leq \epsilon \quad \text{und} \quad \mu_p[v] = 1 \right\}$

Satz

$\forall p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ und $\epsilon_0 > 0$ $\exists$ eine positive Konstante C, so dass $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$ gilt:

$$\sum_{p,q}[v] \leq \frac{1+C\sqrt{\epsilon}}{8p^2\pi^2} J_1[v] \ \forall v \in \chi_\epsilon^{p,q}$$

$\Upsilon_\epsilon^{p,q} := \left\{ v \in H^1_+(S^1) : \sum_{p,q}[v] = \epsilon \quad \text{und} \quad \mu_p[v] = 1 \right\}$

Satz

$\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ gilt:

$\kappa^1_{p,q}(\epsilon) = inf_{v \in \Upsilon_\epsilon^{p,q}} \frac{J_1[v]}{\sum_{p,q}[v]} \geq max \left\{ \frac{8p^2\pi^2}{1+C\sqrt{\epsilon}}, \epsilon^{(2-q)/q} \kappa_{p,q} \right\}$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 1)

heuristischer Beweis:
1. Fall: $J_1[v] > 8p^2\pi^2\epsilon$: klar

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 1)

heuristischer Beweis:
1. Fall: $J_1[v] > 8p^2\pi^2\epsilon$: klar
2. Fall: $J_1[v] \leq (\kappa_p^\infty)^2\epsilon$ mit $\kappa_p^\infty := \sqrt{8p^2\pi^2}$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 1)

heuristischer Beweis:
1. Fall: $J_1[v] > 8p^2\pi^2\epsilon$: klar
2. Fall: $J_1[v] \leq (\kappa_p^\infty)^2\epsilon$ mit $\kappa_p^\infty := \sqrt{8p^2\pi^2}$
Definiere $w := \frac{v-1}{\kappa_p^\infty\sqrt{\epsilon}} \to J_1[w] \leq 1$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 1)

heuristischer Beweis:
1. Fall: $J_1[v] > 8p^2\pi^2\epsilon$: klar
2. Fall: $J_1[v] \leq (\kappa_p^\infty)^2\epsilon$ mit $\kappa_p^\infty := \sqrt{8p^2\pi^2}$
Definiere $w := \frac{v-1}{\kappa_p^\infty\sqrt{\epsilon}} \to J_1[w] \leq 1$
Entropie:

$$\sum_{p,q}[v] = \frac{1}{pq(pq-1)}[\underbrace{\int_{S^1}(1+\kappa_p^\infty\sqrt{\epsilon}w)^q dx}_{I_1} - \underbrace{(\int_{S^1}(1+\kappa_p^\infty\sqrt{\epsilon}w)^{1/p}dx)^{pq}}_{I_2}]$$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 2)

$$I_1 = \int_{S^1} (1 + \kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} w)^q dx$$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 2)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{S^1} (1 + \kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} w)^q dx \\
&= 1 + q\kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} \int_{S^1} w dx + \frac{q(q-1)(\kappa_p^\infty)^2 \epsilon}{2} \int_{S^1} w^2 dx + O(\epsilon^{3/2})
\end{aligned}
$$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 2)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{S^1} (1 + \kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} w)^q dx \\
&= 1 + q\kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} \int_{S^1} w dx + \frac{q(q-1)(\kappa_p^\infty)^2 \epsilon}{2} \int_{S^1} w^2 dx + O(\epsilon^{3/2}) \\
I_2 &= (\int_{S^1} (1 + \kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} w)^{1/p} dx)^{pq}
\end{aligned}
$$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 2)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{S^1} (1 + \kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} w)^q dx \\
&= 1 + q\kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} \int_{S^1} w dx + \frac{q(q-1)(\kappa_p^\infty)^2 \epsilon}{2} \int_{S^1} w^2 dx + O(\epsilon^{3/2}) \\
I_2 &= (\int_{S^1} (1 + \kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} w)^{1/p} dx)^{pq} \\
&= (1 + \frac{1}{p} \kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} \int_{S^1} w dx - \frac{(p-1)(\kappa_p^\infty)^2 \epsilon}{2p^2} \int_{S^1} w^2 dx + O(\epsilon^{3/2}))^{pq}
\end{aligned}
$$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 2)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{S^1} (1+\kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} w)^q dx \\
&= 1 + q\kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} \int_{S^1} w dx + \frac{q(q-1)(\kappa_p^\infty)^2 \epsilon}{2} \int_{S^1} w^2 dx + O(\epsilon^{3/2}) \\
I_2 &= (\int_{S^1} (1+\kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} w)^{1/p} dx)^{pq} \\
&= (1 + \frac{1}{p}\kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} \int_{S^1} w dx - \frac{(p-1)(\kappa_p^\infty)^2 \epsilon}{2p^2} \int_{S^1} w^2 dx + O(\epsilon^{3/2}))^{pq} \\
&= 1 + q\kappa_p^\infty \sqrt{\epsilon} \int_{S^1} w dx - \frac{q(p-1)(\kappa_p^\infty)^2 \epsilon}{2p} \int_{S^1} w^2 dx \\
&\quad + \frac{q(pq-1)(\kappa_p^\infty)^2 \epsilon}{2p} (\int_{S^1} w dx)^2 + O(\epsilon^{3/2})
\end{aligned}
$$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 3)

$$\sum_{p,q}[v] \quad = \quad \frac{\epsilon(\kappa_p^{\infty})^2}{2p^2}[\int_{S^1} w^2 dx - (\int_{S^1} w dx)^2] + O(\epsilon^{3/2})$$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 3)

$$\begin{aligned}\sum_{p,q}[v] &= \frac{\epsilon(\kappa_p^\infty)^2}{2p^2}\left[\int_{S^1} w^2 dx - (\int_{S^1} w dx)^2\right] + O(\epsilon^{3/2}) \\ &= \frac{\epsilon(\kappa_p^\infty)^2}{2p^2}\int_{S^1}(w-\bar{w})^2 dx + O(\epsilon^{3/2})\end{aligned}$$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 3)

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q}[v] &= \frac{\epsilon(\kappa_p^\infty)^2}{2p^2}\Big[\int_{S^1} w^2 dx - \Big(\int_{S^1} w dx\Big)^2\Big] + O(\epsilon^{3/2}) \\
&= \frac{\epsilon(\kappa_p^\infty)^2}{2p^2}\int_{S^1} (w - \bar{w})^2 dx + O(\epsilon^{3/2}) \\
&\leq \frac{\epsilon(\kappa_p^\infty)^2}{2p^2}\frac{J_1[w]}{(2\pi)^2} + O(\epsilon^{3/2})
\end{aligned}$$

Beweis der 1.Linearen Abschätzung (Teil 3)

$$
\begin{aligned}
\sum_{p,q}[v] &= \frac{\epsilon(\kappa_p^\infty)^2}{2p^2}\Big[\int_{S^1} w^2 dx - \Big(\int_{S^1} w dx\Big)^2\Big] + O(\epsilon^{3/2}) \\
&= \frac{\epsilon(\kappa_p^\infty)^2}{2p^2}\int_{S^1}(w-\bar{w})^2 dx + O(\epsilon^{3/2}) \\
&\leq \frac{\epsilon(\kappa_p^\infty)^2}{2p^2}\frac{J_1[w]}{(2\pi)^2} + O(\epsilon^{3/2}) \\
&= \frac{J_1[v]}{8p^2\pi^2} + O(\epsilon^{3/2})
\end{aligned}
$$

folgt mit $J_1[v] = (\kappa_p^\infty)^2\epsilon J_1[w]$ und Poincare $(2\pi)^2\left\|v-\bar{v}\right\|^2_{L^2(S^1)} \leq J_1[v]$

Sonderfall für Beweis im Beispiel

Lemma

$v \in H^1_+(S^1)$ und $\sum_{p,q}[v] \leq \epsilon(\mu_p[v])^q$

$$\sum_{p,q}[v] \leq \frac{1+C\sqrt{\epsilon}}{8p^2\pi^2}(\mu_p[v])^{q-2}J_1[v]$$

$\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$

Lineare Abschätzungen 2

Satz

$\forall p > 0$, $q \in (0,2)$ und $\epsilon_0 > 0$ $\exists$ eine positive Konstante C, so dass $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$ gilt:

$$\sum_{p,q}[v] \leq \frac{1+C\sqrt{\epsilon}}{32p^2\pi^4} J_2[v] \; \forall v \in \chi_\epsilon^{p,q} \cap H^2(S^1)$$

optimale Abschätzung

gesucht:

$$\Phi(\sum_{p,q}[v]) \leq J_1[v]$$

optimale Abschätzung

gesucht:

$$\Phi(\textstyle\sum_{p,q}[v]) \leq J_1[v]$$

$\forall v \in H^1_+(S^1)$ und $\mu_p[v] = 1$ $\forall \epsilon_0 > 0$ definiere:

$$\Phi_{\epsilon_0}(x) := \begin{cases} \frac{8p^2\pi^2 x}{(1+C\sqrt{x})} & \text{für} \quad x \in [0, \epsilon_0] \\ 0 & \text{für} \quad x > \epsilon_0 \end{cases}$$

mit $\Phi_0(x) := \kappa_{p,q} x^{2/q}$,
betrachte $\Phi(x) := sup_{\epsilon_0 \geq 0} \{\Phi_\epsilon(x)\}$

- nichtlineare Fokker-Planck-Gleichung
  - stationäre Lösung
  - Gleichgewichtslösung
  - Existenz und Eindeutigkeit der Gleichgewichtslösung
  - zeitabhängige Skalierung
- lineare Fokker-Planck Gleichung
  - Entropie
  - Energie
  - Entropie- und Energieabschätzungen
- Poröse Medien-/schnelle Diffusionsgleichung
  - Entropie
  - Entropieabschätzungen
- nichtlineare Diffusionsgleichung 4.Ordnung
  - Entropieabschätzungen
  - Fazit

Problemstellung

Poröse Medien-/schnelle Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u^m)_{xx}, t > 0, x \in S^1$$

mit Anfangsbedingung u_0 in S^1

Entropie

Definition der Entropie

$$\sum_k [u] := \begin{cases} \frac{1}{k(k+1)} \int_{S^1} u^{k+1} - \bar{u}^{k+1} & \text{für} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \\ \int_{S^1} u log(\frac{u}{\bar{u}}) dx & \text{für} \quad k = 0 \\ - \int_{S^1} log(\frac{u}{\bar{u}}) dx & \text{für} \quad k = -1 \end{cases}$$

Entropie

Definition der Entropie

$$\sum_k[u] := \begin{cases} \frac{1}{k(k+1)} \int_{S^1} u^{k+1} - \bar{u}^{k+1} & \text{für} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \\ \int_{S^1} u log(\frac{u}{\bar{u}})dx & \text{für} \quad k = 0 \\ -\int_{S^1} log(\frac{u}{\bar{u}})dx & \text{für} \quad k = -1 \end{cases}$$

mit $q = k + 1$ und $p = 1$ wähle $v := u^p$, $p := \frac{m+k}{2}$, $q := \frac{k+1}{p} = 2\frac{k+1}{m+k}$
und somit $\bar{u} = \int_{S^1} udx = \int_{S^1} v^{1/p}dx = (\mu_p[v])^{1/p}$

Entropie

Definition der Entropie

$$\sum_k [u] := \begin{cases} \frac{1}{k(k+1)} \int_{S^1} u^{k+1} - \bar{u}^{k+1} & \text{für} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \\ \int_{S^1} u log(\frac{u}{\bar{u}}) dx & \text{für} \quad k = 0 \\ - \int_{S^1} log(\frac{u}{\bar{u}}) dx & \text{für} \quad k = -1 \end{cases}$$

mit $q = k + 1$ und $p = 1$ wähle $v := u^p$, $p := \frac{m+k}{2}$, $q := \frac{k+1}{p} = 2\frac{k+1}{m+k}$
und somit $\bar{u} = \int_{S^1} u dx = \int_{S^1} v^{1/p} dx = (\mu_p[v])^{1/p}$
Eigentschaften von $u \to \sum_k [u]$

- konvex, nicht negativ auf $L^1_+(S^1)$
- Minimum 0 wird erreicht $\Leftrightarrow u = \bar{u}$

zeitliche Änderung der Entropie

Lemma

$k \in \mathbb{R}$, u eine glatte positive Lösung der schnellen Diffusionsgleichung:

- $k + m \neq 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left| (u^{k+m/2})_x \right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := \frac{4m}{(m+k)^2}$
- $k + m = 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left| (logu)_x \right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := m$

zeitliche Änderung der Entropie

Lemma

$k \in \mathbb{R}$, u eine glatte positive Lösung der schnellen Diffusionsgleichung:

- $k + m \neq 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := \frac{4m}{(m+k)^2}$
- $k + m = 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left|(logu)_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := m$

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \sum_k [u] \quad = \frac{d}{dt} \frac{1}{k(k+1)} \int_{S^1} (u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}) dx$$

zeitliche Änderung der Entropie

Lemma

$k \in \mathbb{R}$, u eine glatte positive Lösung der schnellen Diffusionsgleichung:

- $k+m \neq 0$: $\frac{d}{dt}\sum_k[u] + \lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := \frac{4m}{(m+k)^2}$
- $k+m = 0$: $\frac{d}{dt}\sum_k[u] + \lambda \int_{S^1} \left|(log u)_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := m$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum_k[u] &= \frac{d}{dt}\frac{1}{k(k+1)}\int_{S^1}(u^{k+1} - \bar{u}^{k+1})dx \\ &= \frac{1}{k}\int_{S^1} u^k \frac{\partial}{\partial t} u \end{aligned}$$

zeitliche Änderung der Entropie

Lemma

$k \in \mathbb{R}$, u eine glatte positive Lösung der schnellen Diffusionsgleichung:

- $k + m \neq 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := \frac{4m}{(m+k)^2}$
- $k + m = 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left|(log u)_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := m$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sum_k [u] &= \frac{d}{dt} \frac{1}{k(k+1)} \int_{S^1} (u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}) dx \\
&= \frac{1}{k} \int_{S^1} u^k \frac{\partial}{\partial t} u \\
&= \frac{1}{k} \int_{S^1} u^k (u^m)_{xx}
\end{aligned}$$

zeitliche Änderung der Entropie

Lemma

$k \in \mathbb{R}$, u eine glatte positive Lösung der schnellen Diffusionsgleichung:

- $k + m \neq 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := \frac{4m}{(m+k)^2}$
- $k + m = 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left|(log u)_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := m$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sum_k [u] &= \frac{d}{dt} \frac{1}{k(k+1)} \int_{S^1} (u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}) dx \\
&= \frac{1}{k} \int_{S^1} u^k \frac{\partial}{\partial t} u \\
&= \frac{1}{k} \int_{S^1} u^k (u^m)_{xx} \\
&= -\frac{1}{k} \int_{S^1} (u^k)_x (u^m)_x
\end{aligned}$$

zeitliche Änderung der Entropie

Lemma

$k \in \mathbb{R}$, u eine glatte positive Lösung der schnellen Diffusionsgleichung:

- $k + m \neq 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := \frac{4m}{(m+k)^2}$
- $k + m = 0$: $\frac{d}{dt} \sum_k [u] + \lambda \int_{S^1} \left|(logu)_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := m$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sum\nolimits_k [u] &= \frac{d}{dt} \frac{1}{k(k+1)} \int_{S^1} (u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}) dx \\
&= \frac{1}{k} \int_{S^1} u^k \frac{\partial}{\partial t} u \\
&= \frac{1}{k} \int_{S^1} u^k (u^m)_{xx} \\
&= -\frac{1}{k} \int_{S^1} (u^k)_x (u^m)_x \\
&= -m \int_{S^1} u^{m+k-2} u_x^2
\end{aligned}$$

zeitliche Änderung der Entropie

Lemma

$k \in \mathbb{R}$, u eine glatte positive Lösung der schnellen Diffusionsgleichung:

- $k+m \neq 0$: $\frac{d}{dt}\sum_k[u] + \lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := \frac{4m}{(m+k)^2}$
- $k+m = 0$: $\frac{d}{dt}\sum_k[u] + \lambda \int_{S^1} \left|(logu)_x\right|^2 dx = 0$ mit $\lambda := m$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_k[u] &= \frac{d}{dt}\frac{1}{k(k+1)}\int_{S^1}(u^{k+1} - \bar{u}^{k+1})dx \\
&= \frac{1}{k}\int_{S^1} u^k \frac{\partial}{\partial t} u \\
&= \frac{1}{k}\int_{S^1} u^k (u^m)_{xx} \\
&= -\frac{1}{k}\int_{S^1} (u^k)_x (u^m)_x \\
&= -m\int_{S^1} u^{m+k-2} u_x^2 \\
&= -\frac{4m}{(m+k)^2}\int_{S^1} \left|(u^{\frac{k+m}{2}})_x\right|^2
\end{aligned}$$

Abschätzungen

Satz

$m \in (0, +\infty)$, $k \in \mathbb{R} \backslash \{-m\}$, $q = \frac{2(k+1)}{m+k}$, $p = \frac{m+k}{2}$
u eine glatte postivie Lösung der schnellen Diffusiongleichung:

- kurzzeitiger algebraischer Abfall:
  $m > 1$ und $k > -1$:
  $\sum_k [u] \leq [\sum_k [u_0]^{-(2-q)/q} + \frac{2-q}{q} \lambda \kappa_{p,q} t]^{-q/2-q} \ \forall t \in \mathbb{R}^+$
- asymptotischer exponentieller Abfall:
  $m > 0$ und $m + k > 0$: $\exists\ C > 0$ und $t_1 > 0$, so dass
  $\sum_k [u] \leq \sum_k [u_{t_1}] exp(-\frac{8p^2 \pi^2 \lambda \bar{u}^{p(2-q)} (t-t_1)}{1+C\sqrt{\sum_k [u(t_1)]}}) \ \forall t \geq t_1$

Beweis der Abschätzungen Teil 1

1) Anwendung von Lemma:

$\frac{d}{dt}\sum_k[u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx$ mit $u = v^{1/p}$

Beweis der Abschätzungen Teil 1

1) Anwendung von Lemma:

$$\frac{d}{dt}\sum_k[u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx \text{ mit } u = v^{1/p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_k[u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(v^{k+m/2p})_x\right|^2 dx \text{ mit } p = \frac{m+k}{2}$$

Beweis der Abschätzungen Teil 1

1) Anwendung von Lemma:

$$\frac{d}{dt}\sum\nolimits_k[u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx \text{ mit } u = v^{1/p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum\nolimits_k[u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(v^{k+m/2p})_x\right|^2 dx \text{ mit } p = \frac{m+k}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum\nolimits_k[u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(v)_x\right|^2 dx = -\lambda J_1[v]$$

Beweis der Abschätzungen Teil 1

1) Anwendung von Lemma:

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{d}{dt} \textstyle\sum_k[u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx \text{ mit } u = v^{1/p} \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{d}{dt} \textstyle\sum_k[u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(v^{k+m/2p})_x\right|^2 dx \text{ mit } p = \tfrac{m+k}{2} \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{d}{dt} \textstyle\sum_k[u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(v)_x\right|^2 dx = -\lambda J_1[v] \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{d}{dt} \textstyle\sum_k[u] \leq -\lambda \kappa_{p,q} \sum_{p,q}[v]^{2/q} = -\lambda \kappa_{p,q} \sum_k[u]^{2/q}
\end{aligned}
$$

Beweis der Abschätzungen Teil 1

1) Anwendung von Lemma:

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{d}{dt} \textstyle\sum_k [u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(u^{k+m/2})_x\right|^2 dx \text{ mit } u = v^{1/p} \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{d}{dt} \textstyle\sum_k [u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(v^{k+m/2p})_x\right|^2 dx \text{ mit } p = \tfrac{m+k}{2} \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{d}{dt} \textstyle\sum_k [u] = -\lambda \int_{S^1} \left|(v)_x\right|^2 dx = -\lambda J_1[v] \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{d}{dt} \textstyle\sum_k [u] \leq -\lambda \kappa_{p,q} \sum_{p,q} [v]^{2/q} = -\lambda \kappa_{p,q} \sum_k [u]^{2/q}
\end{aligned}
$$

Behauptung folgt mit Integration

Beweis der Abschätzungen Teil 2

2) sei $lim_{t\to\infty} \sum_k [u] = 0$
$\Rightarrow \exists$ ein t_1 mit $\sum_k [u(t_1)] = \epsilon$ und $\sum_k [u(t)] \leq \epsilon$ für $t \geq t_1$

Beweis der Abschätzungen Teil 2

2) sei $lim_{t\to\infty} \sum_k[u] = 0$
$\Rightarrow \exists$ ein t_1 mit $\sum_k[u(t_1)] = \epsilon$ und $\sum_k[u(t)] \leq \epsilon$ für $t \geq t_1$
mit $p = \frac{m+k}{2} > 0$ und Abschätzung
$\Rightarrow \frac{(\kappa_p^\infty)^2}{1+C\sqrt{\epsilon}} \sum_{p,q}[v](\mu_p[v])^{2-q} \leq J_1[v]\ \forall t \geq t_1$

Beweis der Abschätzungen Teil 2

2) sei $lim_{t\to\infty} \sum_k[u] = 0$
$\Rightarrow \exists$ ein t_1 mit $\sum_k[u(t_1)] = \epsilon$ und $\sum_k[u(t)] \leq \epsilon$ für $t \geq t_1$
mit $p = \frac{m+k}{2} > 0$ und Abschätzung
$\Rightarrow \frac{(\kappa_p^\infty)^2}{1+C\sqrt{\epsilon}} \sum_{p,q}[v](\mu_p[v])^{2-q} \leq J_1[v]\ \forall t \geq t_1$
mit $\bar{u}^p = \mu_p[v]$ analog zum 1.Teil
$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_k[u] \leq -\frac{\lambda(\kappa_p^\infty)^2}{1+C\sqrt{\epsilon}} \sum_k[u]\bar{u}^{p(2-q)}\ \forall t \geq t_1$

Beweis der Abschätzungen Teil 2

2) sei $lim_{t\to\infty} \sum_k[u] = 0$
$\Rightarrow \exists$ ein t_1 mit $\sum_k[u(t_1)] = \epsilon$ und $\sum_k[u(t)] \leq \epsilon$ für $t \geq t_1$
mit $p = \frac{m+k}{2} > 0$ und Abschätzung
$\Rightarrow \frac{(\kappa_p^\infty)^2}{1+C\sqrt{\epsilon}} \sum_{p,q}[v](\mu_p[v])^{2-q} \leq J_1[v]\ \forall t \geq t_1$
mit $\bar{u}^p = \mu_p[v]$ analog zum 1.Teil
$\Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_k[u] \leq -\frac{\lambda(\kappa_p^\infty)^2}{1+C\sqrt{\epsilon}} \sum_k[u]\bar{u}^{p(2-q)}\ \forall t \geq t_1$
Behauptung folgt wiederum mit Integration

Vergleich der Abschätzungen

Satz

Für große Anfangsentropien ist der algebraische Abfall schneller als der exponentielle.

Vergleich der Abschätzungen

Satz

Für große Anfangsentropien ist der algebraische Abfall schneller als der exponentielle.

Beweis im allgemeinen:
sei y nicht negativ auf $\mathbb{R}^+ \ni t$
mit $\frac{dy}{dt} \leq -C_1 y^\alpha$ und $\frac{dy}{dt} \leq -C_2 y$
mit $t > 0$, $\alpha > 1$, $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$

Vergleich der Abschätzungen

Satz

Für große Anfangsentropien ist der algebraische Abfall schneller als der exponentielle.

Beweis im allgemeinen:
sei y nicht negativ auf $\mathbb{R}^+ \ni t$
mit $\frac{dy}{dt} \leq -C_1 y^\alpha$ und $\frac{dy}{dt} \leq -C_2 y$
mit $t > 0$, $\alpha > 1$, $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$
nach Gronwall gilt: $y \leq min\{y_1, y_2\}$
mit $\frac{dy_1}{dt} = -C_1 y_1^\alpha$ und $\frac{dy_2}{dt} = -C_2 y_2$ und $y_1(0) = y_2(0) = y_0 > 0$

Vergleich der Abschätzungen

Satz

Für große Anfangsentropien ist der algebraische Abfall schneller als der exponentielle.

Beweis im allgemeinen:
sei y nicht negativ auf $\mathbb{R}^+ \ni t$
mit $\frac{dy}{dt} \leq -C_1 y^\alpha$ und $\frac{dy}{dt} \leq -C_2 y$
mit $t > 0$, $\alpha > 1$, $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$
nach Gronwall gilt: $y \leq min\{y_1, y_2\}$
mit $\frac{dy_1}{dt} = -C_1 y_1^\alpha$ und $\frac{dy_2}{dt} = -C_2 y_2$ und $y_1(0) = y_2(0) = y_0 > 0$
Sei nun $C_1 y_0^\alpha > C_2 y_0$
$\Rightarrow \exists t_* > 0 : 0 < y_1(t) < y_2(t) \; \forall t \in (0, t_*)$
(dies gilt immer für y_0 groß genug)

Vergleich der Abschätzungen

Satz

Für große Anfangsentropien ist der algebraische Abfall schneller als der exponentielle.

Anwendung auf die schnelle Diffusiongleichung:
$y := \sum_k [u]$, $\alpha = \frac{2}{q}$, $C_1 = \lambda\kappa_{p,q}$ und $C_2 = \frac{8p^2\pi^2\lambda\bar{u}^{p(2-q)}}{1+C\sqrt{\epsilon}}$
der algebraische Abfall ist also schneller als der exponentielle, wenn
$K(\epsilon)\bar{u}^{pq} < y_0 \leq \epsilon\bar{u}^{p,q}$ mit $K(\epsilon) = (\frac{8p^2\pi^2}{\kappa_{p,q}(1+C\sqrt{\epsilon})})^{1/p(2-q)}$

Endergebnis

exponentielle Langzeitabschätzung

sei t_* groß genug, so dass gilt $\sum_k [u(t_*)] < \epsilon_0$.
Dann gilt $\forall t > t_1 > t_*$

$$\sum_k [u] \leq \sum_k [u(t_1)] exp^{-(8p^2\pi^2-\mu)(t-t_1)}$$

mit $\mu, \epsilon_0 > 0$

Problemstellung

allgemeine Form der nichtlinearen Diffusionsgleichung 4.Ordnung

$$u_t = -(u^m(u_{xxx} + au^{-1}u_x u_{xx} + bu^{-2}u_x^3))_x, t > 0, x \in S^1$$

mit $m, a, b \in \mathbb{R}$ und Anfangsbedingung $u_0 \in L^1_+(S^1)$

Problemstellung

allgemeine Form der nichtlinearen Diffusionsgleichung 4.Ordnung

$$u_t = -(u^m(u_{xxx} + au^{-1}u_x u_{xx} + bu^{-2}u_x^3))_x, t > 0, x \in S^1$$

mit $m, a, b \in \mathbb{R}$ und Anfangsbedingung $u_0 \in L_+^1(S^1)$

Thin Film Gleichung

$$u_t = -(u^m u_{xxx})_x$$

mit $a = b = 0$

Problemstellung

allgemeine Form der nichtlinearen Diffusionsgleichung 4.Ordnung

$$u_t = -(u^m(u_{xxx} + au^{-1}u_x u_{xx} + bu^{-2}u_x^3))_x, t > 0, x \in S^1$$

mit $m, a, b \in \mathbb{R}$ und Anfangsbedingung $u_0 \in L^1_+(S^1)$

Thin Film Gleichung

$$u_t = -(u^m u_{xxx})_x$$

mit $a = b = 0$

Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn(DLSS)Gleichung

$$u_t = -(u(logu)_{xx})_{xx}$$

mit $m = 0$, $a = -2$ und $b = 1$

zeitliche Änderung der Entropie

praktische Abkürzungen:
$L_{\pm} := \frac{1}{4}(3a+5) \pm \frac{3}{4}\sqrt{(a-1)^2 - 8b}$ und
$A := (k+m+1)^2 - 9(k+m-1)^2 + 12a(k+m-2) - 36b$

zeitliche Änderung der Entropie

praktische Abkürzungen:
$L_{\pm} := \frac{1}{4}(3a+5) \pm \frac{3}{4}\sqrt{(a-1)^2 - 8b}$ und
$A := (k+m+1)^2 - 9(k+m-1)^2 + 12a(k+m-2) - 36b$

Satz

u ist glatte Lösung der allgemeinen Form der nichtlinearen Diffusionsgleichung 4.Ordnung, $(a-1)^2 \geq 8b$

zeitliche Änderung der Entropie

praktische Abkürzungen:
$L_\pm := \frac{1}{4}(3a+5) \pm \frac{3}{4}\sqrt{(a-1)^2 - 8b}$ und
$A := (k+m+1)^2 - 9(k+m-1)^2 + 12a(k+m-2) - 36b$

Satz

u ist glatte Lösung der allgemeinen Form der nichtlinearen Diffusionsgleichung 4.Ordnung, $(a-1)^2 \geq 8b$

- Entropy Zerteilung: $k, m \in \mathbb{R}$, $L_- \leq k+m \leq L_+$:
  $\frac{d}{dt}\sum_k[u] \leq 0 \; \forall t > 0$

zeitliche Änderung der Entropie

praktische Abkürzungen:
$L_{\pm} := \frac{1}{4}(3a+5) \pm \frac{3}{4}\sqrt{(a-1)^2 - 8b}$ und
$A := (k+m+1)^2 - 9(k+m-1)^2 + 12a(k+m-2) - 36b$

Satz

u ist glatte Lösung der allgemeinen Form der nichtlinearen Diffusionsgleichung 4.Ordnung, $(a-1)^2 \geq 8b$

- Entropy Zerteilung: $k, m \in \mathbb{R}$, $L_- \leq k+m \leq L_+$:
  $\frac{d}{dt}\sum_k[u] \leq 0 \;\forall t > 0$
- Entropy Produkt: $k, m \in \mathbb{R}$, $k+m+1 \neq 0$, $L_- < k+m < L_+$:
  A ist positiv, $\frac{d}{dt}\sum_k[u] + \mu \int_{S^1} \left|(u^{(k+m+1)/2})_{xx}\right|^2 dx \leq 0$
  mit $\mu := \frac{4}{(k+m+1)^4} min\left\{(k+m+1)^2, A\right\}$

zeitliche Änderung der Entropie

praktische Abkürzungen:
$L_\pm := \frac{1}{4}(3a+5) \pm \frac{3}{4}\sqrt{(a-1)^2 - 8b}$ und
$A := (k+m+1)^2 - 9(k+m-1)^2 + 12a(k+m-2) - 36b$

Satz

u ist glatte Lösung der allgemeinen Form der nichtlinearen Diffusionsgleichung 4.Ordnung, $(a-1)^2 \geq 8b$

- Entropy Zerteilung: $k, m \in \mathbb{R}$, $L_- \leq k+m \leq L_+$:
  $\frac{d}{dt}\sum_k[u] \leq 0 \; \forall t > 0$
- Entropy Produkt: $k, m \in \mathbb{R}$, $k+m+1 \neq 0$, $L_- < k+m < L_+$:
  A ist positiv, $\frac{d}{dt}\sum_k[u] + \mu \int_{S^1} \left|(u^{(k+m+1)/2})_{xx}\right|^2 dx \leq 0$
  mit $\mu := \frac{4}{(k+m+1)^4} min\left\{(k+m+1)^2, A\right\}$
  $k+m+1 = 0$, $a+b+2-\mu \leq 0$ für mache $0 < \mu < 1$:
  $\frac{d}{dt}\sum_k[u] + \mu \int_{S^1} \left|(log u)_{xx}\right|^2 dx \leq 0 \; \forall t > 0$

Anwendung des Satzes auf die Beispiele

Thin film Gleichung:
$L_- = 1/2$, $L_+ = 2$ und

$$\mu = \frac{16}{(k+m+1)^4}(-k-m+2)(2k+2m-1)$$

DLSS:
$L_- = -1$, $L_+ = 1/2$, $m = 0$ und

$$\mu = \begin{cases} \frac{4}{(k+1)^2} & -1 < k \leq 1/3 \\ \frac{16(1-2k)}{(k+1)^3} & 1/3 \leq k < 1/2 \end{cases}$$

Abschätzungen

$k+m+1 \neq 0$: $v := u^p$, $p := \frac{m+k+1}{2}$, $q := \frac{k+1}{p} = 2\frac{k+1}{m+k+1}$
$(k > -1 \text{ und } m > 0 \rightarrow q \in (0,2))$
$\Rightarrow \bar{u} = \int_{S^1} u dx = \int_{S^1} v^{1/p} dx = (\mu_p[v])^{1/p}$

Satz

$k, m \in \mathbb{R}$, $L_- \leq k+m \leq L_+$ und u eine glatte, positive Lösung der allgemeinen nichtlinearen Diffusionsgleichung 4.Ordnung.

- kurzzeitiger algebraischerAbfall: $k > -1$ und $m > 0$:
  $\sum_k[u] \leq [\sum_k[u_0]^{-(2-q)/q} + 4\pi^2 \mu \kappa_{p,q}(\frac{2}{q}-1)t]^{-q/(2-q)}\ \forall t \in \mathbb{R}^+$
- asymptotischer exponentieller Abfall:
  $m+k+1 > 0$: $\exists C > 0$ und $t_1 > 0$, so dass
  $\sum_k[u] \leq [\sum_k[u(t_1)] exp(-\frac{32p^2\pi^4\mu\bar{u}^{p(2-q)}(t-t_1)}{1+C\sqrt{\sum_k[u(t_1)]}})\ \forall t \geq t_1$

Beweis: analog zum anderen Beispiel

Thin film Gleichung 1

Thin Film Gleichung

$$u_t = -(u^m u_{xxx})_x$$

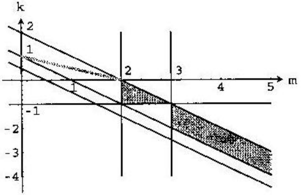

FIGURE 2. *Region of parameters for which global exponential decay of the entropy has been shown in* [15, 35] *for the thin film equation.*

globaler exponentieller Abfall:
$k = 1 - \frac{m}{2}$ und $m \in (0, 2)$
$-1 < k < 2 - m$ und $m \in [2, 3)$
$1 - m < k < 2 - m$ und $m \in [3, +\infty)$

Thin film Gleichung 2

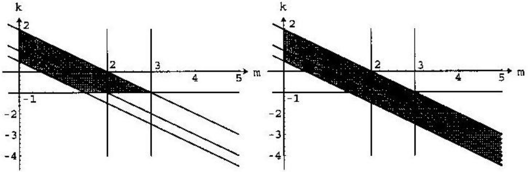

FIGURE 3. *Region of parameters for which global algebraic decay of the entropy (left) and asymptotic exponential decay of the entropy (right) is shown by Theorem 4 for the thin film equation.*

kurzzeitigen algebraischen Abfall:
$\frac{1}{2} < k + m < 2$ und $m > 0$
für asymptotschen exponentiellen Abfall:
$\frac{1}{2} < k + m < 2$

DLSS

Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn(DLSS)Gleichung

$$u_t = -(u(logu)_{xx})_{xx}$$

asymptotische exponentiellen Abfall:
$k \in (-1, \frac{1}{2})$ und $m = 0$

ENDE

Vielen Dank für die

Aufmerksamkeit!