Nichtlineare Diffusion

Maren Sundermeier

20. Oktober 2008

- Einführung

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit
- Anwendungen

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit
- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium

- Einführung

- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit

- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer

- Einführung

- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit

- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer
  - Grundwasserfiltration

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit
- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer
  - Grundwasserfiltration
  - Populationsdynamik

- Einführung

- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit

- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer
  - Grundwasserfiltration
  - Populationsdynamik

Thematik

Darstellung von verschiedenen Verfahren zur Lösung der poröse-Medien-Gleichung (PME)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u^m, \quad m > 1, \quad u = u(x, t)$$

Thematik

Darstellung von verschiedenen Verfahren zur Lösung der poröse-Medien-Gleichung (PME)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u^m, \quad m > 1, \quad u = u(x,t)$$

Dabei gilt:

- $u = u(x,t)$ nichtnegative, skalare Funktion
- $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in \mathbb{R}$
- $d \geq 1$
- $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$

allgemeine Eigenschaften

- kann aufgestellt werden für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $0 < t < \infty$
  $\longrightarrow$ Anfangsbedingungen zur Lösungsermittlung nötig

allgemeine Eigenschaften

- kann aufgestellt werden für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $0 < t < \infty$
  $\rightarrow$ Anfangsbedingungen zur Lösungsermittlung nötig
- praktische Probleme: begrenzter Unterraum $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ für $0 < t < T$ gegeben
  $\rightarrow$ zusätzlich zu Anfangs- auch Grenzbedingungen zur Lösung des Problems nötig

weitere Formen der PME

- physikalische Fragestellungen: oft vorgegebene Beschränkung $u \geq 0$

weitere Formen der PME

- physikalische Fragestellungen: oft vorgegebene Beschränkung $u \geq 0$
- ohne diese Bedingung schreibt man die PME auch oft in der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x(|u|^{m-1}\, u)$$

weitere Formen der PME

- physikalische Fragestellungen: oft vorgegebene Beschränkung $u \geq 0$
- ohne diese Bedingung schreibt man die PME auch oft in der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x(|u|^{m-1} u)$$

- zusätzlich kann man einen Zwangsterm auf der rechten Seite hinzuaddieren:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x(|u|^{m-1} u) + f \quad \text{mit} \quad f = f(x, t)$$

weitere Formen der PME

- physikalische Fragestellungen: oft vorgegebene Beschränkung $u \geq 0$
- ohne diese Bedingung schreibt man die PME auch oft in der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x(|u|^{m-1}\, u)$$

- zusätzlich kann man einen Zwangsterm auf der rechten Seite hinzuaddieren:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x(|u|^{m-1} u) + f \quad \text{mit} \quad f = f(x, t)$$

- f kann alternativ auch von u (Reaktion und Absorption) oder ∇u (Konvektion) abhängen

Sonderfälle

$m = 1$: Wärmeleitungsgleichung (HE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u$$

Sonderfälle

$m = 1$: Wärmeleitungsgleichung (HE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u$$

$m < 1$: schnelle Diffusionsgleichung (FDE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x \frac{u^m}{m} = div(u^{m-1} \nabla u)$$

Sonderfälle

$m = 1$: Wärmeleitungsgleichung (HE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u$$

$m < 1$: schnelle Diffusionsgleichung (FDE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x \frac{u^m}{m} = div(u^{m-1} \nabla u)$$

- $m = 0$: logarithmische Diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{-1} \nabla u) = \Delta log(u)$$

3 Lösungstypen:

- Separate-Variablen-Lösungen
- Wanderwellen
- Source-type-Lösungen

Konzepte zur Lösung:

- Skalierung
- Grenzlösungen
- begrenzte Ausbreitung
- freie Grenzen

3 Lösungstypen:

- Separate-Variablen-Lösungen
- Wanderwellen
- Source-type-Lösungen

Konzepte zur Lösung:

- Skalierung
- Grenzlösungen
- begrenzte Ausbreitung
- freie Grenzen

Da auch Lösungen mit wechselndem Vorzeichen betrachtet werden, beziehen sich die folgenden Abschnitte auf die PME der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x(|u|^{m-1}\,u)$$

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit
- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer
  - Grundwasserfiltration
  - Populationsdynamik

stationäre Lösungen

- $u_t = 0$, d.h. u ist nur von x abhängig, $u = u(x)$
  $\Rightarrow w = u^m$ muss $\Delta w = 0$ erfüllen
  $\Rightarrow$ jede harmonische Funktion $w(x)$ ist eine stationäre Lösung, wenn man

$$u(x,t) = w(x)^{1/m} \quad \text{für} \quad w(x) \geq 0,$$
$$u(x,t) = |w(x)|^{1/m} \cdot sign(w)$$

für Lösungen mit wechselndem Vorzeichen,

setzt

stationäre Lösungen

- $u_t = 0$, d.h. u ist nur von x abhängig, $u = u(x)$
  $\Rightarrow w = u^m$ muss $\Delta w = 0$ erfüllen
  $\Rightarrow$ jede harmonische Funktion $w(x)$ ist eine stationäre Lösung, wenn man

  $$u(x,t) = w(x)^{1/m} \quad \text{für} \quad w(x) \geq 0,$$
  $$u(x,t) = |w(x)|^{1/m} \cdot sign(w)$$

  für Lösungen mit wechselndem Vorzeichen,

  setzt
- zusätzliche Forderung: Lösungen im ganzen Raum definiert und nichtnegativ
  $\Rightarrow$ Lösungen konstant (triviale Lösungen)

stationäre Lösungen

- 1D: Rest der stationären Lösungen sind genau die linearen Funktionen $u^m = Ax + b$ mit $A \neq 0$

stationäre Lösungen

- 1D: Rest der stationären Lösungen sind genau die linearen Funktionen $u^m = Ax + b$ mit $A \neq 0$
- Forderung der Nichtnegativität: Beschränkung auf Bereich $u > 0$ $\Rightarrow$ Lösungen für $x > 0$ mit $u(0) = 0$:

$$u = Cx^{1/m} \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ an der Grenze keine C^1-Funktionen

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit
- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer
  - Grundwasserfiltration
  - Populationsdynamik

Betrachtung der HE:

$$u_t = \Delta u$$

Betrachtung der HE:

$$u_t = \Delta u$$

Fourier-Ansatz:

$$u(x,t) = T(t) \cdot F(x)$$

$\Rightarrow$ separate Gleichungen für $T(t)$ (Zeitfaktor) und $F(x)$ (Raumprofil):

$$\dot{T}(t) = -\lambda T(t)^m, \quad \Delta F^m(x) + \lambda F(x) = 0 \tag{1}$$

Betrachtung der HE:

$$u_t = \Delta u$$

Fourier-Ansatz:

$$u(x,t) = T(t) \cdot F(x)$$

$\Rightarrow$ separate Gleichungen für $T(t)$ (Zeitfaktor) und $F(x)$ (Raumprofil):

$$\dot{T}(t) = -\lambda T(t)^m, \quad \Delta F^m(x) + \lambda F(x) = 0 \tag{1}$$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig (Kopplung beider Gleichungen)
- $\lambda = 0 \Rightarrow$ stationären Lösungen $\Rightarrow$ im Folgenden: $\lambda \neq 0$
- Lösung der ersten Gleichung:

$$T(t) = (C + (m-1)\lambda t)^{-1/(m-1)}$$

- Reduktion des Problems auf Lösen der nichtlinearen, elliptischen Gleichung für F
  $\rightarrow$ abhängig vom Vorzeichen von λ

λ positiv (nichtlineares EW-Problem)

- Reduktion auf Fall $\lambda = 1$ durch Änderung des Wertes von F:

$$\begin{aligned} & F_1(x) \quad \text{Lösung von (1) mit} \quad \lambda = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & F(x) = \mu F_1(x) \quad \text{Lösung von (1)} \\ & \text{mit} \quad \mu = \lambda^{1/(m-1)}, \quad \lambda > 0, \quad \lambda \neq 1 \end{aligned}$$

λ positiv (nichtlineares EW-Problem)

- Reduktion auf Fall $\lambda = 1$ durch Änderung des Wertes von F:

$$\begin{aligned} & F_1(x) \quad \text{Lösung von (1) mit} \quad \lambda = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & F(x) = \mu F_1(x) \quad \text{Lösung von (1)} \\ & \text{mit} \quad \mu = \lambda^{1/(m-1)}, \quad \lambda > 0, \quad \lambda \neq 1 \end{aligned}$$

- Änderung von F zu $G = |F|^{m-1} F$

$$\Rightarrow \Delta G(x) + \lambda \, |G(x)|^{p-1} \, G(x) = 0 \quad \text{mit} \quad p = \frac{1}{m} \in (0,1)$$

λ positiv (nichtlineares EW-Problem)

- Gleichung in begrenztem Gebiet mit regulärer Grenze gegeben und Grenzbedingungen gleich Null
  $\Rightarrow$ Existenz genau einer positiven Lösung

Separate-Variablen-Lösung

$$u(x,t) = (C + (m-1)(t-t_0))^{-1/(m-1)} F(x) \quad \text{mit} \quad t_0 \quad \text{beliebig}$$

λ positiv (nichtlineares EW-Problem)

- Gleichung in begrenztem Gebiet mit regulärer Grenze gegeben und Grenzbedingungen gleich Null
  $\Rightarrow$ Existenz genau einer positiven Lösung

Separate-Variablen-Lösung

$$u(x,t) = (C + (m-1)(t-t_0))^{-1/(m-1)} F(x) \quad \text{mit} \quad t_0 \quad \text{beliebig}$$

- klassische Lösung der PME im Raum $\Omega \times (t_0, \infty)$ mit Grenzbedingungen gleich Null
- Anfangsbedingung bei $t = t_0$: $u(x, t_0) = \infty$
- Bemerkung: Methode ergibt keine klassische Lösung im ganzen Raum $\mathbb{R}^d$ für die PME!

$\lambda = -l < 0$ (Blow-up)

- Lösungen mit Zeitfaktor

$$T(t) = (C - (m-1)lt)^{-1/(m-1)} = ((m-1)l(t-t_0))^{-1/(m-1)}$$

- Reduktion auf Fall $l = 1$: Lösen der elliptischen Gleichung $\Delta F^m(x) = F(x)$ nach einer Skalierung
- radialsymmetrische Lösungen (definiert im ganzen Raum)

Lösungen von der Form

$$u = f(\eta) \quad \text{mit} \quad \eta = x_1 - ct \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Lösungen von der Form

$$u = f(\eta) \quad \text{mit} \quad \eta = x_1 - ct \in \mathbb{R} \tag{2}$$

- Wellenbewegung entlang der x_1-Achse mit der Zeit ohne Änderung der Gestalt
- eben: Form nicht von $x_2, ..., x_d$ abhängig
- Wellengeschwindigkeit $c \neq 0$
  - $c = 0$: stationäre Lösungen
  - $c < 0$: Reduktion zu $c > 0$ durch Reflektion
  - $c > 0$: Bewegung in positiver Richtung auf Achse (Wellenrichtung)
- Invarianz unter Rotation $\Rightarrow$ Welle in geradliniger Richtung $\vec{\eta}$ im Raum $\mathbb{R}^d$ durch $\eta = \vec{x}\vec{\eta} - ct$

Herleitung der Lösungen

- Einsetzen von (2) in die PME

$$\Rightarrow (f^m)'' + cf' = 0 \quad \text{mit Ableitungen bzgl.} \quad \eta$$

- Integration

$$\Rightarrow (f^m)' + cf = K \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{beliebig}$$

Herleitung der Lösungen

- Einsetzen von (2) in die PME

$$\Rightarrow (f^m)'' + cf' = 0 \quad \text{mit Ableitungen bzgl.} \quad \eta$$

- Integration

$$\Rightarrow (f^m)' + cf = K \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{beliebig}$$

- Wahl der Integrationskonstante:
  Näherung der Welle an 'leere Region', d.h. $f(\eta) = f'(\eta) = 0$ für alle $\eta >> 0$

$$\Rightarrow K = 0 \quad \Rightarrow mf^{m-2}f' + c = 0$$

- Integration

$$\Rightarrow \frac{m}{m-1} f^{m-1} = -c\eta + K_1 = c(\eta_0 - \eta)$$

Herleitung der Lösungen

mathematischer Druck

$$v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$$

Herleitung der Lösungen

mathematischer Druck

$$v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$$

$\Rightarrow$ Druck ist lineare Funktion:

klassische Lösung der PME in $\{(x,t) : x < x_0 + ct\}$

$$v(x,t) = K_1 - c(x - ct) = c(x_0 + ct - x) \tag{3}$$

analytische Probleme und Lösungswege

- (3) liefert keine Lösung der PME im ganzen Raum
  $\rightarrow v$ negativ für $x > x_0 + ct$
- Lösungsweg: Strategie des Grenzproblems
  - Lösen eines angenäherten Problems, bei dem die Schwierigkeiten nicht auftreten
  - Übergang zum Grenzwert
  - Begutachtung des erhaltenen Ergebnisses

Wärmeleitungsgleichung (HE)

Wanderwellen für HE

$$u(x,t) = Ce^{c(ct-x)}$$

Wärmeleitungsgleichung (HE)

Wanderwellen für HE

$$u(x,t) = Ce^{c(ct-x)}$$

- klassische Lösungen
- immer positiv
- erreichen $u = 0$ bei $x = \infty$
- Eigenschaft der HE: nichtnegative Lösungen immer positiv

Ausgangspunkt

- Lösung der PME bei begrenzter Masse, die an einem einzelnen Punkt (z.B. $x = 0$) konzentriert ist
- klassisches Problem: Beschreibung der Entwicklung der Wärmeverteilung ausgelöst durch eine Punktquelle
  $\rightarrow$ mathematisch: Lösung der HE unter der Anfangsbedingung $u(x, 0) = M\delta(x)$ mit $M > 0$ (Punktquelle)

Ausgangspunkt

- Lösung der PME bei begrenzter Masse, die an einem einzelnen Punkt (z.B. $x = 0$) konzentriert ist
- klassisches Problem: Beschreibung der Entwicklung der Wärmeverteilung ausgelöst durch eine Punktquelle
  $\rightarrow$ mathematisch: Lösung der HE unter der Anfangsbedingung $u(x, 0) = M\delta(x)$ mit $M > 0$ (Punktquelle)

Fundamentallösung für HE (Gauß´scher Kern)

$$E(x, t) = M(4\pi t)^{-d/2} exp(\frac{-x^2}{4t})$$

$\Rightarrow$ Existiert eine Quellenlösung für die nichtlineare Diffusionsgleichung (PME mit $m > 1$)?

Graphische Darstellung der Fundamentallösung für HE

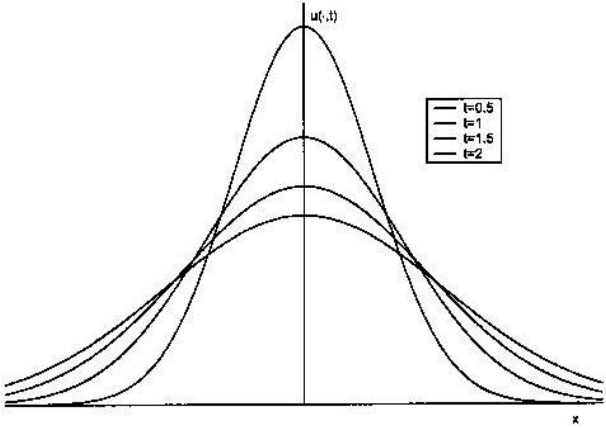

Abbildung: Fundamentallösung der HE

ZKB-Lösung

Quellenlösung für PME (ZKB-Lösung)

$$U(x,t;M) = t^{-\alpha} F(xt^{-\alpha/d}) \quad \text{mit} \quad F(\xi) = (C - \kappa\xi^2)_+^{1/(m-1)}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \frac{d}{d(m-1)+2}, \quad \kappa = \frac{(m-1)\alpha}{2md}$$

ZKB-Lösung

Quellenlösung für PME (ZKB-Lösung)

$$U(x,t;M) = t^{-\alpha} F(xt^{-\alpha/d}) \quad \text{mit} \quad F(\xi) = (C - \kappa\xi^2)_+^{1/(m-1)}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \frac{d}{d(m-1)+2}, \quad \kappa = \frac{(m-1)\alpha}{2md}$$

Abhängigkeiten:

- $C > 0$ prinzipiell beliebig
- kann eindeutig festgelegt werden durch die Bedingung für die totale Masse $\int U dx = M$
  $\Rightarrow M = a(m,d)C^{\gamma}, \quad \gamma = \frac{d}{2(m-1)\alpha} \quad \text{mit} \quad \gamma = \gamma(m,d)$

Graphische Darstellung der ZKB-Lösung

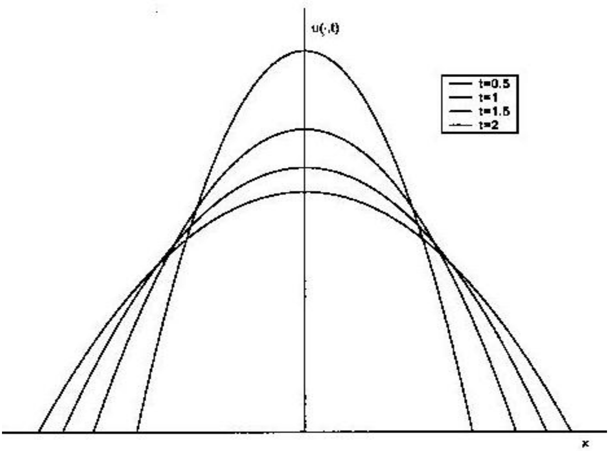

Abbildung: ZKB-Lösung der PME

alternative Formen der ZKB-Lösung

Man setzt:

$$C = \kappa \xi_0^2 M^{2(m-1)\alpha/d}$$

ZKB-Lösung

$$U_m(x,t;M) = \frac{M^{2\alpha/d}}{t^\alpha} F_{m,1}\Big(\frac{x}{(M^{m-1}t)^{\alpha/d}}\Big)$$

$$\text{mit} \quad F_{m,1} = (\kappa(\xi_0^2 - \xi^2))_+^{1/(m-1)}$$

alternative Formen der ZKB-Lösung

mathematischer Druck:

$$v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$$

ZKB-Lösung in Termen des mathematischen Drucks

$$V_m(x, t; M) = \frac{(Ct^{\alpha/d} - bx^2)_+}{t}$$

$$\text{mit} \quad b = \frac{\alpha}{2d}, \quad C > 0$$

alternative Formen der ZKB-Lösung

mathematischer Druck:

$$v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$$

ZKB-Lösung in Termen des mathematischen Drucks

$$V_m(x, t; M) = \frac{(Ct^{\alpha/d} - bx^2)_+}{t}$$

$$\text{mit} \quad b = \frac{\alpha}{2d}, \quad C > 0$$

Grenzwert $m \to 1$ (Masse M fest gewählt):

$$\lim_{m \to 1} U_m(x, t; M) = ME(x, t)$$

Herleitung der ZKB-Lösung

Selbstähnlichkeitsform

$$U(x,t) = t^{-\alpha} f(\eta) \quad \text{mit} \quad \eta = x t^{-\beta} \tag{4}$$

Herleitung der ZKB-Lösung

Selbstähnlichkeitsform

$$U(x,t) = t^{-\alpha} f(\eta) \quad \text{mit} \quad \eta = xt^{-\beta} \tag{4}$$

- α, β: Ähnlichkeitsexponenten
  - α: Dichtekonzentrationsrate
  - β: Raumexpansionrate
- f: Selbstähnlichkeitsprofil

Herleitung der ZKB-Lösung

Selbstähnlichkeitsform

$$U(x,t) = t^{-\alpha} f(\eta) \quad \text{mit} \quad \eta = xt^{-\beta} \tag{4}$$

- α, β: Ähnlichkeitsexponenten
  - α: Dichtekonzentrationsrate
  - β: Raumexpansionrate
- f: Selbstähnlichkeitsprofil

Ziel: Bestimmung von α, β, f, sodass U Lösung ist (mit passenden zusätzlichen Daten)
Anmerkung: Die Fundamentallösung der HE ist selbstähnlich mit den Exponenten $\alpha = d/2, \beta = 1/2$ und einer Gauß'schen Funktion als Profil!

1. Schritt

Einsetzen des Selbstähnlichkeitsansatzes (4) in PME $U_t = \Delta U^m$:

1. Schritt

Einsetzen des Selbstähnlichkeitsansatzes (4) in PME $U_t = \Delta U^m$:

- Zeitableitung:

$$\begin{aligned} U_t &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) + t^{-\alpha} \nabla f(\eta) \cdot x t^{-\beta-1}(-\beta) \\ &= -t^{-\alpha-1}(\alpha f(\eta) + \beta \nabla f(\eta) \cdot \eta) \end{aligned}$$

1. Schritt

Einsetzen des Selbstähnlichkeitsansatzes (4) in PME $U_t = \Delta U^m$:

- Zeitableitung:

$$\begin{aligned} U_t &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) + t^{-\alpha} \nabla f(\eta) \cdot x t^{-\beta-1}(-\beta) \\ &= -t^{-\alpha-1}(\alpha f(\eta) + \beta \nabla f(\eta) \cdot \eta) \end{aligned}$$

- Anwendung des Laplace-Operators:

$$\Delta(U^m) = t^{-\alpha m} \Delta_x (f^m(x t^{-\beta})) = t^{-\alpha m - 2\beta} \Delta_\eta (f^m)(\eta)$$

1. Schritt

Einsetzen des Selbstähnlichkeitsansatzes (4) in PME $U_t = \Delta U^m$:

- Zeitableitung:

$$\begin{aligned} U_t &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) + t^{-\alpha} \nabla f(\eta) \cdot x t^{-\beta-1}(-\beta) \\ &= -t^{-\alpha-1}(\alpha f(\eta) + \beta \nabla f(\eta) \cdot \eta) \end{aligned}$$

- Anwendung des Laplace-Operators:

$$\Delta(U^m) = t^{-\alpha m} \Delta_x (f^m(x t^{-\beta})) = t^{-\alpha m - 2\beta} \Delta_\eta (f^m)(\eta)$$

$$\Rightarrow t^{-\alpha-1}(-\alpha f(\eta) - \beta \eta \cdot \nabla f(\eta)) = t^{-\alpha m - 2\beta} \Delta f^m(\eta)$$

2. Schritt

Beseitigung der Zeitabhängigkeit:

$$\Rightarrow \alpha(m-1) + 2\beta = 1$$

$$\Rightarrow \text{Profilgleichung:} \quad \Delta f^m + \beta\eta \cdot \nabla f + \alpha f = 0$$

2. Schritt

Beseitigung der Zeitabhängigkeit:

$$\Rightarrow \alpha(m-1) + 2\beta = 1$$
$$\Rightarrow \text{Profilgleichung:} \quad \Delta f^m + \beta\eta \cdot \nabla f + \alpha f = 0$$

- nichtlineare, elliptische Gleichung mit freiem Parameter (z.B. β)
- Grenzbedingungen oder andere nötig für wohldefiniertes nichtlineares EW-Problem

3. Schritt

Festlegung von β durch Massenerhaltung $\int U(x,t)dx = const.$:

$$\int U(x,t)dx = \int t^{-\alpha} f(xt^{-\beta})dx = t^{-\alpha} t^{\beta d} \int f(\eta)d\eta = const.(t)$$
$$\Rightarrow \alpha = d\beta$$

Schritt 2: $\qquad \alpha(m-1) + 2\beta = 1$

3. Schritt

Festlegung von β durch Massenerhaltung $\int U(x,t)dx = const.$:

$$\int U(x,t)dx = \int t^{-\alpha} f(xt^{-\beta})dx = t^{-\alpha} t^{\beta d} \int f(\eta)d\eta = const.(t)$$

$$\Rightarrow \alpha = d\beta$$

Schritt 2: $\alpha(m-1) + 2\beta = 1$

Ähnlichkeitsexponenten

$$\beta = \frac{1}{d(m-1)+2}, \quad \alpha = \frac{d}{d(m-1)+2}$$

4. Schritt

Lösung von $\Delta f^m + \beta\eta \cdot \nabla f + \alpha f = 0$ in $\mathbb{R}^d$

- Ziel: nichtnegative Lösungen
- Problem rotationsinvariant: radialsymmetrische Lösung $f = f(r)$ mit $r = |x|$

$$\frac{1}{r^{d-1}}(r^{d-1}(f^m)')' + \beta r f' + d\beta f = 0$$
$$\Rightarrow (r^{d-1}(f^m)' + \beta r^d f)' = 0$$

4. Schritt

Lösung von $\Delta f^m + \beta\eta \cdot \nabla f + \alpha f = 0$ in $\mathbb{R}^d$

- Ziel: nichtnegative Lösungen
- Problem rotationsinvariant: radialsymmetrische Lösung $f = f(r)$ mit $r = |x|$

$$\frac{1}{r^{d-1}}(r^{d-1}(f^m)')' + \beta r f' + d\beta f = 0$$
$$\Rightarrow (r^{d-1}(f^m)' + \beta r^d f)' = 0$$

- Integration: $r^{d-1}(f^m)' + \beta r^d f = C$
- Grenzbedingungen $f \to 0$ für $r \to \infty$ ($\Rightarrow C = 0$):

$$(f^m)' + \beta r f = 0 \Rightarrow m f^{m-2} f' = -\beta r$$
$$\Rightarrow \frac{m}{m-1} f^{m-1} = -\frac{\beta}{2} r^2 + C \Rightarrow f^{m-1} = A - \frac{\beta(m-1)}{2m} r^2$$

Erweiterung zu $m < 1$

- Quellenlösung existiert mit ähnlichen Eigenschaften solange $\alpha > 0$
- Erweiterung im Bereich $m_c < m < 1$ möglich für
  $m_c = 0$ für $d = 1, 2$ bzw. $m_c = \frac{d-2}{d}$ für $d \geq 3$
- ZKB-Lösung bleibt bestehen, jedoch mit $m - 1 < 0$ und $\kappa < 0$
  $\Rightarrow U_m$ überall positiv

Erweiterung zu $m < 1$

- Quellenlösung existiert mit ähnlichen Eigenschaften solange $\alpha > 0$
- Erweiterung im Bereich $m_c < m < 1$ möglich für $m_c = 0$ für $d = 1, 2$ bzw. $m_c = \frac{d-2}{d}$ für $d \geq 3$
- ZKB-Lösung bleibt bestehen, jedoch mit $m - 1 < 0$ und $\kappa < 0$ $\Rightarrow U_m$ überall positiv

ZKB-Lösung für $m_c < m < 1$

$$U_m(x, t; M) = t^{-\alpha} F\left(\frac{x}{t^{\alpha/\beta}}\right) \quad \text{mit} \quad F(\xi) = (C + \kappa_1 \xi^2)_+^{-1/(1-m)}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \frac{d}{d(m-1)+2} \quad \text{und} \quad \kappa_1 = -\kappa = \frac{(1-m)\alpha}{2md}$$

Graphische Darstellung der Quellenlösung für FDE

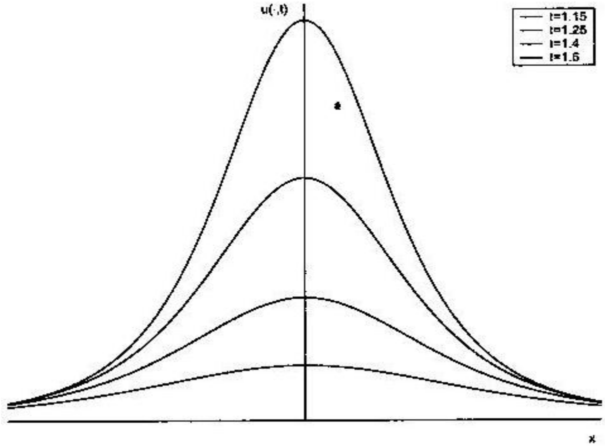

Abbildung: Quellenlösung für FDE mit $d = 3$, $m = 1/2$

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit
- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer
  - Grundwasserfiltration
  - Populationsdynamik

Einführung

- PME ($m \geq 2$) beschreibt den Fluss eines idealen Gases durch ein homogenes poröses Medium
- makroskopische Sicht: Formulierung in den Variablen Dichte ρ, Druck p und Geschwindigkeit $\vec{V}$ als Funktionen von Raum $\vec{x}$ und Zeit t

Zusammenhänge der einzelnen Größen

- Massengleichgewicht (Kontinuitätsgleichung):

$$\epsilon\rho_t + \nabla \cdot (\rho\vec{V}) = 0 \quad \text{mit} \quad \epsilon \in (0,1) \quad \text{(Porosität)}$$

Zusammenhänge der einzelnen Größen

- Massengleichgewicht (Kontinuitätsgleichung):

$$\epsilon \rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{mit} \quad \epsilon \in (0,1) \quad \text{(Porosität)}$$

- Darcy's Gesetz:

$$\mu \vec{V} = -k \nabla p$$

Zusammenhänge der einzelnen Größen

- Massengleichgewicht (Kontinuitätsgleichung):

$$\epsilon \rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{mit} \quad \epsilon \in (0,1) \quad \text{(Porosität)}$$

- Darcy's Gesetz:

$$\mu \vec{V} = -k \nabla p$$

- Zustandsgleichung (für ideales Gas):

$$p = p_0 \rho^\gamma \quad (\gamma \text{ - Polytropenexponent})$$

  - $\gamma = 1$: isotherm (Temperatur konstant)
  - $\gamma > 1$: adiabatisch (kein Austausch thermischer Energie)

Vereinfachung

Annahmen:

- Viskosität (Zähflüssigkeit) $\mu > 0$ und konstant
- Porosität (Maß für Dichte) $\epsilon > 0$ und konstant
- Permeabilität (Durchlässigkeit) $k > 0$ und konstant
- Referenzdruck $p_0 > 0$ und konstant

Vereinfachung

Annahmen:

- Viskosität (Zähflüssigkeit) $\mu > 0$ und konstant
- Porosität (Maß für Dichte) $\epsilon > 0$ und konstant
- Permeabilität (Durchlässigkeit) $k > 0$ und konstant
- Referenzdruck $p_0 > 0$ und konstant

$$\Rightarrow \rho_t = c\Delta(\rho^m) \quad \text{mit} \quad m = 1 + \gamma, \quad c = \frac{\gamma k p_0}{(\gamma + 1)\epsilon\mu}$$

Abgleich der Notation

- u anstelle von ρ für die Dichte
- v anstelle von p für den Druck

Abgleich der Notation

- u anstelle von ρ für die Dichte
- v anstelle von p für den Druck

Ausblenden physikalischer Konstanten: $\epsilon, k, \mu = 1$

- Darcy's Gesetz: $\vec{V} = -\nabla v = -mu^{m-2}\nabla u$
- Massengleichgewicht: $\partial_t u + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ mit $\vec{j} = u\vec{V}$ (Massenfluss)

Erweiterung auf nichthomogene Medien

Betrachtung von Fluss mit ϵ, μ, k nicht-konstant (Funktionen von Raum und Zeit)

$\Rightarrow$ Verallgemeinerung der PME

NHPME

$$\epsilon(x,t)\partial_t u = \nabla \cdot (c(x,t)\nabla u^m)$$

mit $\quad \epsilon, c \quad$ nichtnegativ

Erweiterung zur Filtrationsgleichung

Ansatz: Zustandsgleichung keine Potenzfunktion, aber
$p = p(\rho), \quad k = k(\rho), \quad \mu = \mu(\rho)$

$\Rightarrow$ Gleichung für Dichte

GPME (Filtrationsgleichung)

$\rho_t = \Delta\Phi(\rho) + f$ mit $\Phi = \Phi(\rho)$ monoton steigend und $\rho \geq 0$

hier: $\Phi'(\rho) = \frac{\rho k(\rho) p'(\rho)}{\mu(\rho)\epsilon}$

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit
- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer
  - Grundwasserfiltration
  - Populationsdynamik

Einführung

Wärmeausbreitung mit temperaturabhängiger Wärmeleitfähigkeit

allgemeine Form (ohne Quellen und Senken)

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(\kappa \nabla T)$$

Einführung

Wärmeausbreitung mit temperaturabhängiger Wärmeleitfähigkeit

allgemeine Form (ohne Quellen und Senken)

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(\kappa \nabla T)$$

- Temperatur $T = T(x,t)$
- spezifische Wärme $c = c(x,t)$ (bei konstantem Druck)
- Dichte des Mediums $\rho = \rho(x,t)$
- Wärmeleitfähigkeit $\kappa = \kappa(x,t)$

c, ρ konstant, $\kappa = \phi(T)$

allgemeine Form

$$\partial_t T = \Delta \Phi(T)$$

$\rightarrow$ Filtrationsgleichung in völlig anderem Kontext gefunden
Zustandsfunktion Φ (Kirchhoff-Transformation): $\Phi(T) = \frac{1}{c\rho} \int_0^T \kappa(s) ds$

c, ρ konstant, $\kappa = \phi(T)$

allgemeine Form

$$\partial_t T = \Delta\Phi(T)$$

$\rightarrow$ Filtrationsgleichung in völlig anderem Kontext gefunden
Zustandsfunktion Φ (Kirchhoff-Transformation): $\Phi(T) = \frac{1}{c\rho}\int_0^T \kappa(s)ds$

Abhängigkeit durch Potenzfunktion gegeben: $\kappa(T) = aT^n$ mit $a, n > 0$ und konstant

PME für Konstante b

$$T_t = b\Delta(T^m) \quad \text{mit} \quad m = n+1, \quad b = \frac{a}{c\rho m}$$

$c\rho = \psi(T), \kappa = \phi(T)$

Einführung einer neuen Variablen: $T' = \Psi(T) \equiv \int_0^T \psi(s) ds$

$$\Rightarrow \partial_t \Psi(T) = \Delta\Phi(T)$$

$c\rho = \psi(T), \kappa = \phi(T)$

Einführung einer neuen Variablen: $T' = \Psi(T) \equiv \int_0^T \psi(s)ds$

$$\Rightarrow \partial_t \Psi(T) = \Delta\Phi(T)$$

GPME

$$\partial_t T' = \Delta F(T') \quad \text{mit} \quad F = \Phi \circ \Psi^{-1}$$

Abhängigkeit durch Potzenfunktion gegeben
$\Rightarrow$ PME mit entsprechendem Exponenten

physikalischer Hintergrund

- Wärmeleitfähigkeit bei Strahlung: $\kappa = \frac{lc}{3} c_{rad}, c_{rad} = aT^3$
  - Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8 m/s$
  - Rosseland's mittlere freie Weglänge l
  - spezifische Wärme c_{rad}
- $l = const. \Rightarrow$ PME mit $m = 4$
- l i.A. temperaturabhängig: $l \approx aT^n$
  - mehrfach ionisierte Gase: $n \in (1.5, 2.5)$

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit
- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer
  - Grundwasserfiltration
  - Populationsdynamik

Modellierung

Filtration einer inkompressiblen Flüssigkeit (z.B. Wasser) durch eine poröse Schicht

Annahmen:

- Schicht der Höhe H auf horizontalem, undurchlässigen Fundament ($z = 0$)
- Ignorieren der transversalen Variable y
- Wassermasse füllt Region $\Omega = \{(x, z) : z \leq h(x, t)\}$
  $\rightarrow$ es gibt keine Region unvollständiger Sättigung

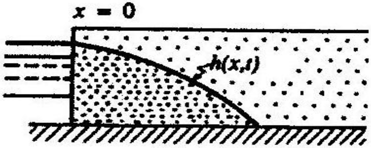

Abbildung: Grundwasserfiltration

Modellierung

- $0 \leq h(x,t) \leq H$ mit h unbekannt
  $\Rightarrow$ System von 3 Gleichungen mit Unbekannten:
  - u, w Geschwindigkeitskomponenten
  - p Druck

  $\rightarrow$ Gleichung für Massenerhaltung der inkompressiblen Flüssigkeit,
  2 Gleichungen für Erhaltung der Bewegungsgröße (Navier-Stokes)
- Zufügen von Anfangs- und Grenzbedingungen

Herleitung der Boussinesq's Gleichung

Bewegungsgleichungen

$$\rho\left(\frac{du_z}{dt} + \vec{u} \cdot \nabla u_z\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

Herleitung der Boussinesq's Gleichung

Bewegungsgleichungen

$$\rho(\frac{du_z}{dt} + \vec{u} \cdot \nabla u_z) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

- Annahme: Fluss mit nahezu horizontaler Geschwindigkeit $\vec{u} \approx (u, o)$
  $\Rightarrow$ Weglassen des Terms auf der linken Seite
- Integration nach z: $p + \rho g z = const.$
- Berechnung der Konstante auf der freien Fläche $z = h(x, t)$:
  Stetigkeit des Drucks $\Rightarrow p = 0 \Rightarrow p = \rho g(h - z)$

Herleitung der Boussinesq's Gleichung

Ausnutzen der Massenerhaltung:

- Wahl eines Teilgebiets $S = (x, x+a) \times (0, C)$

$$\Rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+a} \int_0^h dydx = - \int_{\partial S} \vec{u} \cdot \vec{n} dl$$

mit Porosität ϵ und Geschwindigkeit $\vec{u}$

- Darcy's Gesetz mit Gravitation: $\vec{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla (p + \rho g z)$
- rechte seitliche Grenzfläche: $\vec{u}\vec{n} \approx (u, 0) \cdot (1, 0) = u$
- linke seitliche Grenzfläche: $\vec{u}\vec{n} = -u$

Herleitung der Boussinesq's Gleichung

- Ausnutzen der Formel für p und Differentiation nach x:

$$\Rightarrow \epsilon \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} h dz$$

Herleitung der Boussinesq's Gleichung

- Ausnutzen der Formel für p und Differentiation nach x:

$$\Rightarrow \epsilon \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} h dz$$

Boussinesq's Gleichung (PME mit $m = 2$)

$$h_t = \kappa (h^2)_{xx} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{\rho g k}{2 m \mu}$$

Herleitung der Boussinesq's Gleichung

- Ausnutzen der Formel für p und Differentiation nach x:

$$\Rightarrow \epsilon \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} h dz$$

Boussinesq's Gleichung (PME mit $m = 2$)

$$h_t = \kappa (h^2)_{xx} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{\rho g k}{2 m \mu}$$

Erweiterungen

- Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen: $h_t = \kappa\Delta(h^2)$
- Wassereinfluss oder -ausfluss: $h_t = \kappa\Delta(h^2) + f$

- Einführung
- Verfahren zur Lösung der PME
  - einige einfache Beispiele
  - Separation der Variablen
  - ebene Wanderwellen
  - Source-type-Lösungen, Selbstähnlichkeit
- Anwendungen
  - Gasfluss durch ein poröses Medium
  - nichtlinearer Wärmetransfer
  - Grundwasserfiltration
  - Populationsdynamik

Ausbreitung von biologischen Populationen

homogenes Medium

Population einer Spezies

$$\partial_t u = div(\kappa \nabla u) + f(u)$$

Ausbreitung von biologischen Populationen

homogenes Medium

Population einer Spezies

$$\partial_t u = div(\kappa \nabla u) + f(u)$$

- Dichte u: Konzentration der Spezies
- Reaktionsterm $f(u)$: symbiotische Interaktion in der Spezies
- Diffusionkoeffizient κ

Ausbreitung von biologischen Populationen

Vermeidung von Überbevölkerung

- Annahme: Diffusionkoeffizient κ anwachsende Funktion der Populationsdichte

$$\rightarrow \kappa = \phi(u), \quad \phi \quad \text{anwachsend}$$

realistische Annahme für bestimmte Fälle: $\phi(u) = au$

Ausbreitung von biologischen Populationen

Vermeidung von Überbevölkerung

- Annahme: Diffusionkoeffizient κ anwachsende Funktion der Populationsdichte

$$\rightarrow \kappa = \phi(u), \quad \phi \quad \text{anwachsend}$$

realistische Annahme für bestimmte Fälle: $\phi(u) = au$

grundlegende Gleichungen für Reaktionsterm:

- Malthusian-Gesetz: $f(u) = \mu u$
  $\rightarrow \mu$ Summe zweier Koeffizienten mit entgegengesetztem Vorzeichen („Geburt" und „Sterben")
- Verhulst-Gesetz: $f(u) = \mu u - \lambda u^2$

Ausbreitung von biologischen Populationen

- Ignorieren des Reaktionsterms: PME mit $m = 2$
- Beachtung des Reaktionsterms bzw. Präsenz von mehreren Spezies: nichtlineares Reaktions-Diffusions-System von Gleichungen parabolischen Typs

ENDE

Vielen Dank für die

Aufmerksamkeit!