Handout zum Seminar

Nichtlineare Diffusion
(WS 2008/2009)

Einführungsvortrag

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Fachbereich Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Maren Sundermeier
am 20. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Darstellung von verschiedenen Verfahren zur Lösung der
poröse-Medien-Gleichung (PME):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u^m, \quad m > 1, \quad u = u(x,t)}$$

Dabei gilt:

- $u = u(x,t)$ nichtnegative, skalare Funktion
- $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in \mathbb{R}$
- $d \geq 1$
- $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$

Allgemeine Eigenschaften:

- kann aufgestellt werden für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $0 < t < \infty$
  $\rightarrow$ Anfangsbedingungen zur Lösungsermittlung nötig
- praktische Probleme: begrenzter Unterraum $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ für $0 < t < T$ gegeben
  $\rightarrow$ zusätzlich zu Anfangs- auch Grenzbedingungen zur Lösung des Problems nötig

Weitere Formen der PME:

- physikalische Fragestellungen: oft vorgegebene Beschränkung $u \geq 0$
- ohne diese Bedingung schreibt man die PME auch oft in der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x(|u|^{m-1}\, u)$$

- zusätzlich kann man einen Zwangsterm auf der rechten Seite hinzuaddieren:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x(|u|^{m-1}u) + f \quad \text{mit} \quad f = f(x,t)$$

- f kann alternativ auch von u (Reaktion und Absorption) oder ∇u (Konvektion) abhängen

Sonderfälle:

- $m = 1$: ***Wärmeleitungsgleichung (HE)***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u$$

- $m < 1$: ***schnelle Diffusionsgleichung (FDE)***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x \frac{u^m}{m} = div(u^{m-1}\nabla u)$$

  - $m = 0$: *logarithmische Diffusion*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{-1}\nabla u) = \Delta log(u)$$

2 Verfahren zur Lösung der PME

2.1 einfache Beispiele

Stationäre Lösungen:

- $u_t = 0$, d.h. u ist nur von x abhängig, $u = u(x)$
  $\Rightarrow w = u^m$ muss $\Delta w = 0$ erfüllen
  $\Rightarrow$ Jede harmonische Funktion $w(x)$ ist eine stationäre Lösung, wenn man

  $u(x,t) = w(x)^{1/m}$ für $w(x) \geq 0$,
  $u(x,t) = |w(x)|^{1/m} \cdot sign(w)$ für Lösungen mit wechselndem Vorzeichen,

  setzt!
- zusätzliche Forderung: Lösungen im ganzen Raum definiert und nichtnegativ
  $\Rightarrow$ Lösungen konstant (triviale Lösungen)
- 1D: Rest der stationären Lösungen sind genau die linearen Funktionen $u^m = Ax+b$ mit $A \neq 0$
- Forderung der Nichtnegativität: Beschränkung auf Bereich $u > 0$
  $\Rightarrow$ Lösungen für $x > 0$ mit $u(0) = 0$:

$$u = Cx^{1/m} \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}$$

2.2 Separation der Variablen

Betrachtung der HE:

$$u_t = \Delta u$$

Fourier-Ansatz:

$$u(x,t) = T(t) \cdot F(x)$$

$\Rightarrow$ separate Gleichungen für $T(t)$ (Zeitfaktor) und $F(x)$ (Raumprofil):

$$\dot{T}(t) = -\lambda T(t)^m, \quad \Delta F^m(x) + \lambda F(x) = 0 \tag{1}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ ($\lambda = 0$: stationäre Lösungen)
Lösung der ersten Gleichung:

$$T(t) = (C + (m-1)\lambda t)^{-1/(m-1)}$$

2.2.1 λ positiv (nichtlineares EW-Problem)

Reduktion auf Fall $\lambda = 1$ durch Änderung des Wertes von F:

$$F_1(x) \text{ Lösung von (1) mit } \lambda = 1$$
$$\Leftrightarrow F(x) = \mu F_1(x) \text{ Lösung von (1) mit } \mu = \lambda^{1/(m-1)},\ \lambda > 0,\ \lambda \neq 1$$

- $G := |F|^{m-1} F \Rightarrow \Delta G(x) + \lambda\,|G(x)|^{p-1} G(x) = 0$ mit $p = \frac{1}{m} \in (0,1)$
- Gleichung in begrenztem Gebiet mit regulärer Grenze gegeben und Grenzbedingungen gleich Null
  $\Rightarrow$ Existenz genau einer positiven Lösung

Separate-Variablen-Lösung:

$$\boxed{u(x,t) = (C + (m-1)(t-t_0))^{-1/(m-1)} F(x) \quad \text{mit} \quad t_0 \quad \text{beliebig}}$$

Bemerkung: Methode ergibt keine klassische Lösung im ganzen Raum $\mathbb{R}^d$ für die PME!

2.2.2 $\lambda = -l < 0$ (Blow-up)

- Zeitfaktor:

$$T(t) = (C - (m-1)lt)^{-1/(m-1)} = ((m-1)l(t-t_0))^{-1/(m-1)}$$

- Reduktion auf Fall $l = 1$: Lösen der elliptischen Gleichung $\Delta F^m(x) = F(x)$ nach einer Skalierung

2.3 Ebene Wanderwellen

Lösungen von der Form:

$$u = f(\eta) \quad \text{mit} \quad \eta = x_1 - ct \in \mathbb{R}$$

Mathematischer Druck:

$$v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$$

$\Rightarrow$ ***Klassische Lösung der PME in*** $\{(x,t) : x < x_0 + ct\}$***:***

$$\boxed{v(x,t) = K_1 - c(x - ct) = c(x_0 + ct - x)}$$

Wanderwellen für Wärmeleitungsgleichung (HE):

$$u(x,t) = Ce^{c(ct-x)}$$

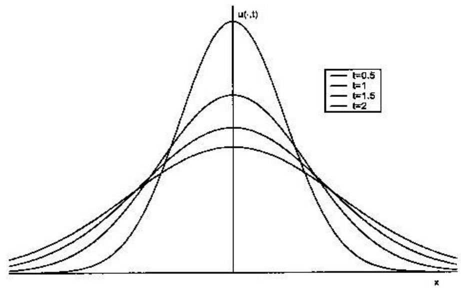

Abbildung 1: Fundamentallösung der HE

2.4 Source-type-Lösungen

Lösung der HE unter der Anfangsbedingung $u(x,0) = M\delta(x)$ mit $M > 0$ (Punktquelle)
Fundamentallösung für HE (siehe Abb.1):

$$\boxed{E(x,t) = M(4\pi t)^{-d/2} exp(\frac{-x^2}{4t})}$$

Quellenlösung für PME (ZKB-Lösung, siehe Abb.2):

$$\boxed{\begin{array}{l} U(x,t;M) = t^{-\alpha} F(xt^{-\alpha/d}) \quad \text{mit} \quad F(\xi) = (C - \kappa\xi^2)_+^{1/(m-1)} \\ \text{mit} \quad \alpha = \dfrac{d}{d(m-1)+2}, \quad \kappa = \dfrac{(m-1)\alpha}{2md} \end{array}}$$

Alternative Formen der ZKB-Lösung: $\quad C := \kappa\xi_0^2 M^{2(m-1)\alpha/d}$

$$U_m(x,t;M) = \frac{M^{2\alpha/d}}{t^\alpha} F_{m,1}(\frac{x}{(M^{m-1}t)^{\alpha/d}}) \qquad \text{mit} \qquad F_{m,1} = (\kappa(\xi_0^2 - \xi^2))_+^{1/(m-1)}$$

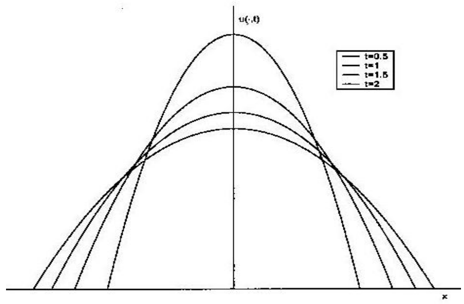

Abbildung 2: ZKB-Lösung der PME

ZKB-Lösung in Termen des mathematischen Drucks:

$$V_m(x,t;M) = \frac{(Ct^{\alpha/d} - bx^2)_+}{t} \qquad \text{mit} \qquad b = \frac{\alpha}{2d}, \quad C > 0$$

Grenzwert $m \to 1$ (Masse M fest gewählt):

$$\lim_{m\to 1} U_m(x,t;M) = ME(x,t)$$

ZKB-Lösung für $m_c < m < 1$***:***

$$U_m(x,t;M) = t^{-\alpha} F(\frac{x}{t^{\alpha/\beta}}) \quad \text{mit} \quad F(\xi) = (C + \kappa_1 \xi^2)_+^{-1/(1-m)}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \frac{d}{d(m-1)+2} \quad \text{und} \quad \kappa_1 = -\kappa = \frac{(1-m)\alpha}{2md}$$

3 Anwendungen

3.1 Gasfluss durch ein poröses Medium

Zusammenhänge der auftretenden Größen:

- Massengleichgewicht (Kontinuitätsgleichung):

$$\epsilon \rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{mit} \quad \epsilon \in (0,1)$$

- Darcy's Gesetz: $\mu \vec{V} = -k \nabla p$
- Zustandsgleichung (für ideales Gas): $p = p_0 \rho^\gamma$

Annahmen: $\mu, \epsilon, k, p_0 > 0$ und konstant

$$\boxed{\Rightarrow \rho_t = c\Delta(\rho^m) \quad \text{mit} \quad m = 1 + \gamma, \quad c = \frac{\gamma k p_0}{(\gamma+1)\epsilon\mu}}$$

Abgleich der Notation:

- u anstelle von ρ für die Dichte
- v anstelle von p für den Druck

Ausblenden physikalischer Konstanten: $\epsilon, k, \mu = 1$

- Darcy's Gesetz: $\vec{V} = -\nabla v = -mu^{m-2}\nabla u$
- Massengleichgewicht: $\partial_t u + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ mit $\vec{j} = u\vec{V}$ (Massenfluss)

Erweiterung auf nichthomogene Medien:
Betrachtung von Fluss mit ϵ, μ, k nicht-konstant (Funktionen von Raum und Zeit)
$\Rightarrow$ ***Verallgemeinerung der PME (NHPME):***

$$\boxed{\epsilon(x,t)\partial_t u = \nabla \cdot (c(x,t)\nabla u^m) \quad \text{mit} \quad \epsilon, c \quad \text{nichtnegativ}}$$

Erweiterung zur Filtrationsgleichung:
Ansatz: Zustandsgleichung keine Potenzfunktion, aber $p = p(\rho), k = k(\rho), \mu = \mu(\rho)$
$\Rightarrow$ ***GPME (Filtrationsgleichung):***

$$\boxed{\rho_t = \Delta\Phi(\rho) + f \quad \text{mit} \quad \Phi = \Phi(\rho) \quad \text{monoton steigend und} \quad \rho \geq 0}$$

hier: $\Phi'(\rho) = \frac{\rho k(\rho) p'(\rho)}{\mu(\rho)\epsilon}$

3.2 Nichtlinearer Wärmetransfer

allgemeine Form (ohne Quellen und Senken):

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(\kappa\nabla T)$$

mit Temperatur $T = T(x,t)$, spezifischer Wärme $c = c(x,t)$ (bei konstantem Druck), Dichte des Mediums $\rho = \rho(x,t)$ und Wärmeleitfähigkeit $\kappa = \kappa(x,t)$
1. Fall: c, ρ konstant, $\kappa = \phi(T)$

$$\partial_t T = \Delta\Phi(T)$$

Zustandsfunktion Φ (Kirchhoff-Transformation): $\Phi(T) = \frac{1}{c\rho}\int_0^T \kappa(s)ds$
Abhängigkeit durch Potenzfunktion gegeben: $\kappa(T) = aT^n$ mit $a, n > 0$ und konstant
$\Rightarrow$ ***PME für Konstante*** b***:***

$$T_t = b\Delta(T^m) \quad \text{mit} \quad m = n + 1, \quad b = \frac{a}{c\rho m}$$

2. Fall: $c\rho = \psi(T), \kappa = \phi(T)$
Einführung einer neuen Variablen: $T' = \Psi(T) \equiv \int_0^T \psi(s)ds$

$$\Rightarrow \partial_t\Psi(T) = \Delta\Phi(T)$$

$\Rightarrow$ ***GMPE:***

$$\partial_t T' = \Delta F(T') \quad \text{mit} \quad F = \Phi \circ \Psi^{-1}$$

3.3 Grundwasserfiltration

Annahmen:

- Schicht der Höhe H auf horizontalem, undurchlässigen Fundament ($z = 0$)
- Ignorieren der transversalen Variable y
- Wassermasse füllt Region $\Omega = \{(x, z) : z \leq h(x, t)\}$
  $\rightarrow$ es gibt keine Region unvollständiger Sättigung

Herleitung der Boussinesq's Gleichung:
Bewegungsgleichungen:

$$\rho(\frac{du_z}{dt} + \vec{u} \cdot \nabla u_z) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

- Annahme: Fluss mit nahezu horizontaler Geschwindigkeit $\vec{u} \approx (u, o)$
  $\Rightarrow$ Weglassen des Terms auf der linken Seite
- Integration nach z: $p + \rho g z = const.$
- Berechnung der Konstante auf der freien Fläche $z = h(x, t)$: Stetigkeit des Drucks
  $\Rightarrow p = 0 \Rightarrow p = \rho g(h - z)$

Ausnutzen der Massenerhaltung:

- Wahl eines Teilgebiets $S = (x, x + a) \times (0, C)$

$$\Rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+a} \int_0^h dy dx = -\int_{\partial S} \vec{u} \cdot \vec{n} dl \quad \text{mit Porosität} \quad \epsilon \quad \text{und Geschwindigkeit} \quad \vec{u}$$

- Darcy's Gesetz mit Gravitation: $\vec{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho g z)$
- rechte seitliche Grenzfläche: $\vec{u}\vec{n} \approx (u, 0) \cdot (1, 0) = u$
- linke seitliche Grenzfläche: $\vec{u}\vec{n} = -u$

Ausnutzen der Formel für p und Differentiation nach x:

$$\Rightarrow \epsilon \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} h dz$$

$\Rightarrow$ ***Boussinesq's Gleichung (PME mit*** $m = 2$***):***

$$\boxed{h_t = \kappa (h^2)_{xx} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{\rho g k}{2 m \mu}}$$

3.4 Populationsdynamik

Population einer Spezies:

$$\boxed{\partial_t u = div(\kappa \nabla u) + f(u)}$$

mit Dichte u (Konzentration der Spezies), Reaktionsterm $f(u)$ (Interaktion in der Spezies) und Diffusionskoeffizient κ
Vermeidung von Überbevölkerung:
Annahme: Diffusionkoeffizient κ anwachsende Funktion der Populationsdichte

$$\to \kappa = \phi(u), \quad \phi \quad \text{anwachsend}$$

realistische Annahme für bestimmte Fälle: $\phi(u) = au$
grundlegende Gleichungen für Reaktionsterm:

- Malthusian-Gesetz: $f(u) = \mu u$
  $\to$ μ Summe zweier Koeffizienten mit entgegengesetztem Vorzeichen („Geburt“ und „Sterben“)
- Verhulst-Gesetz: $f(u) = \mu u - \lambda u^2$

Literatur:

- Juan Luis Vazquez, The Porous Medium Equation, Kapitel 1,2,4
- Juan Luis Vazquez, Smoothing, Kapitel 2.1, 3.2, 7.1, 7.2 und Appendix II
- P. Crosetto, M. Icardi, M. Scianna, Populations Dynamics