Praktikum:

# Einführung in die Programmierung zur Numerik mit C++

Freitag, 21.03.2013

---

**Aufgabe 1 (Templates)**
Schreiben Sie Ihre Matrixklasse in ein Template um, so dass Sie in Ihrer Matrix beliebige Zahlentypen speichern können. Testen Sie Ihr Template für die Typen `double` und `int`.

**Bonusaufgabe (CG-Verfahren für quadratische Optimierungsprobleme)**
Implementieren Sie das konjugierte-Gradienten-Verfahren für quadratische Optimierungsprobleme. Testen Sie Ihr Programm: Suchen Sie

$$\bar{x} = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad \text{wobei } f(x) := \frac{1}{2} x^T A x - b^T x,$$

mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Nehmen Sie $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Startvektor.

Beachte: Im Minimum $\bar{x}$ gilt $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Wegen $\nabla f(x) = Ax - b$, löst $\bar{x}$ das LGS $A\bar{x} = b$.

Zur Implementation des CG-Verfahrens:

1. Wähle Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Berechne $\nabla f(x^0) = Ax^0 - b$. Setze $r^0 = -\nabla f(x^0)$, $k := 0$.
2. Falls $\nabla f(x^k) = 0$: STOP.
3. Berechne $\alpha_k = -\frac{\nabla f(x^k)^T r^k}{(r^k)^T A r^k}$, $x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k$, $\nabla f(x^{k+1}) = \nabla f(x^k) + \alpha_k A r^k$,
   $\beta_k = \frac{\left\|\nabla f(x^{k+1})\right\|^2}{\left\|\nabla f(x^k)\right\|^2}$, $r^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k r^k$.
4. Setze $k = k + 1$ und gehe zu 2.

**Hinweis:**
Alle Berechnungen beruhen auf Matrix-Rechenoperationen. Nutzen Sie insbesondere die Operatoren `+=` und `*=`, sowie die Methode `skalarprodukt`.