

Praktikum:

Einführung in die Programmierung zur Numerik mit C++

Dienstag, 15.03.2011

Aufgabe 1 (Ableitung)

Schreiben Sie ein Programm `diffquot`, welches die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ mit Hilfe des Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + h.$$

berechnet. Da $f'(x) + h \approx f'(x)$ für kleines $h \in \mathbb{R}_+$, lässt sich der Vorwärtsdifferenzenquotient als Approximation für $f'(x)$ verwenden.

Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Schreiben Sie eine Funktion namens `evaluate`, welche die Funktionswerte für $f(x) = x^2$ berechnet.
2. Schreiben Sie eine weitere Funktion `differentiate`, welche den Differenzenquotienten für festes $h > 0$ berechnet (unter Nutzung von `evaluate`).
3. Schreiben Sie ein Haupt-Programm, das als Kommandozeilen-Parameter die Intervallgrenzen a und b , die Anzahl N von Gitterpunkten und den Dateinamen einer Ausgabedatei übergeben bekommt. Die Schrittweite h wird auf $h = \frac{b-a}{N}$ gesetzt. D.h.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b, \quad \text{wobei } x_n = a + n \cdot h.$$

Das Programm soll die Ableitung der Funktion (in x_n) mittels obigem Differenzenquotienten approximieren und eine Textdatei erzeugen, die zeilenweise die Ableitung zu den jeweiligen x -Werten enthält.

4. Plotten Sie die Ableitung sowie die Originalfunktion auf dem Intervall $[0, 3]$ mit $N = 300$ Unterteilungen mit Hilfe von `gnuplot`.
5. Tauschen sie $f(x) = x^2$ durch $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ aus, in dem sie nur die `evaluate`-Methode verändern.

Aufgabe 2 (Ein einfacher ODE-Löser)

Schreiben Sie ein Programm `euler.cc`, welches die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = \frac{\sqrt{1 - y(x)^2}}{1 + x^2}, \quad y(0) = y_0 = 0$$

im Intervall $[0, 1]$ mit dem Eulerverfahren löst.

Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Schreiben Sie eine Funktion names `evaluate`, welche die Funktionswerte für

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{1 + x^2}$$

berechnet.

2. Schreiben Sie eine weitere Funktion `euler`, welche das Euler-Verfahren durchführt.
3. Schreiben Sie ein Haupt-Programm, das als Kommandozeilen-Parameter die Intervallgrenzen a und b , den Anfangswert y_0 , die Anzahl der Gitterpunkte N , und den Dateinamen einer Ausgabedatei übergeben bekommt. Das Programm soll die Anfangswertaufgabe mit dem Eulerverfahren lösen und eine Textdatei erzeugen, die zeilenweise die Lösung zu den jeweiligen x-Werten enthält.
4. Plotten Sie die Lösung auf dem Intervall $[0, 1]$ mit $N = 100$ (d.h. Schrittweite $h = 0.01$) mit Hilfe von `gnuplot`.
5. Ändern Sie die `evaluate`-Methode, um das Problem

$$\bar{y}'(x) = \sqrt{1 - \bar{y}(x)^2}, \quad \bar{y}(0) = 0$$

im Intervall $[0, 1]$ zu lösen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung $\bar{y}(x) = \sin(x)$.

Zur Erinnerung: Das allgemeine Eulerverfahren wird durch

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

realisiert. In unserem Fall ist $f(x, y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$ bzw. $f(x, \bar{y}) = \sqrt{1 - \bar{y}^2}$.