Praktikum Wissenschaftliches Rechnen: Elektrische Impedanztomographie

Wintersemester 1998/99

Dr. A. Klawonn[1] **Dr. F. Wübbeling**[2]

20. Oktober 1998

[1]e-mail: klawonn@math.uni-muenster.de
[2]e-mail: wuebbel@math.uni-muenster.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Finite Elemente

In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick zur Methode der finiten Elemente gegeben werden. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Implementierung. Für eine detaillierte theoretische Behandelung verweisen wir auf die Lehrbücher von Braess [2] und Brenner/Scott [3].

1.1 Variationsformulierungen elliptischer Differentialgleichungen

Wir beschränken uns in dieser Einführung auf gleichmäßig elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Weiterhin nehmen wir an, daß der Leser mit den Grundlagen der Sobolevräume vertraut ist, wie sie zum Beispiel in [5] vermittelt werden, s.a. [2, 3].

Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d, d = 2, 3$ ein Gebiet, dann betrachten wir die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{array}{rcll} -\operatorname{div}(a\nabla u) + b\,u &=& f & \text{in} \quad \Omega \\ u &=& g_0 & \text{auf} \quad \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + c\,u &=& g_1 & \text{auf} \quad \Gamma_1, \end{array} \tag{1.1}$$

wobei $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset \partial\Omega$ mit $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$ und $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ gilt. Desweiteren sind $a = a(x), b = b(x)$ und $c = c(x)$ gegebene Funktionen der Ortsvariablen x. Gesucht ist die unbekannte Funktion $u = u(x)$.

Bei den Randbedingungen können auch die Extremfälle $\Gamma_0 = \partial\Omega$ und $\Gamma_1 = \partial\Omega$ auftreten.

Wir benutzen den Sobolevraum $H^1(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$, wobei der Abschluß bezüglich der Norm $\|u\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{|u|^2_{H^1(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}}$ mit

$$|u|^2_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega (\nabla u)^2 dx \quad \text{und} \quad \|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega u^2 dx$$

gebildet wird. Desweiteren führen wir den Soblevraum $H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$ ein.

Beschränken wir uns auf Lipschitz-Gebiete, so gilt

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \,:\, v_{|\partial\Omega} = 0\},$$

d.h. $H_0^1(\Omega)$ besteht aus genau den H^1-Funktionen, die auf dem Rand von Ω den Wert Null haben. Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet, dann definieren wir schließlich noch die Räume

$$\begin{aligned} H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega) &:= \{v \in H^1(\Omega) \,:\, v_{|\Gamma_0} = g_0\}, \\ H^1_{\Gamma_0,0}(\Omega) &:= \{v \in H^1(\Omega) \,:\, v_{|\Gamma_0} = 0\}. \end{aligned}$$

Damit die Definition von $H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega)$ wohldefiniert ist, nehmen wir der Einfachheit halber $g_0 \in H^1(\partial\Omega)$ an. Für genauere Aussagen benötigen wir die Theorie der Sobolevräume H^k mit reellem Exponenten k, s. zum Beispiel Lions/Magenes [8], Nečas [9], Wloka [10], Hackbusch [7]. Es gilt folgender

Satz 1.1 *Die Sobolevräume $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$ und $H^1_{\Gamma_0,0}(\Omega)$ sind jeweils zusammen mit dem inneren Produkt $(u,v)_{H^1(\Omega)} := (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} + (u,v)_{L_2(\Omega)}$, $(u,v)_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega uv\,dx$ Hilberträume.*

Bemerkung 1.1 *Man beachte, dass $H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega)$ noch nicht einmal ein linearer Vektorraum ist. Begründung!*

Unter Benutzung des Gauß'schen Integralsatzes und des üblichen Dichteschluss können wir eine Variationsformulierung des Randwertproblems (1.1) herleiten. Das Problem lautet dann:

Finde ein $u \in H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega)$, so dass

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_0,0}(\Omega), \tag{1.2}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u,v) &= \int_\Omega a\nabla u \nabla v \;+\; buv\,dx + \int_{\Gamma_1} a\,c\,u\,v\,ds, \\ &=: \mathcal{A}_\Omega(u,v) + \mathcal{A}_{\Gamma_1}(u,v), \\ \mathcal{F}(v) &= \int_\Omega f\,v\,dx + \int_{\Gamma_1} a\,g_1\,v\,ds, \\ &=: \mathcal{F}_\Omega(v) + \mathcal{F}_{\Gamma_1}(v). \end{aligned}$$

Bei dieser Formulierung müssen wir noch mit zwei verschiedenen Räumen arbeiten, nämlich $H^1_{\Gamma_0,0}(\Omega)$ und $H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega)$. Kennen wir jedoch eine Funktion $u_g \in H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega)$, so können wir $H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega)$ wie folgt schreiben

$$H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \,:\, u = u_g + v, v \in H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega)\}.$$

Damit ergibt sich folgende zu (1.2) äquivalente Variationsformulierung:

Finde $u_0 \in H^1_{\Gamma_0,0}(\Omega)$, so dass

$$\mathcal{A}(u_0 + u_g, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_0,0}(\Omega). \tag{1.3}$$

Die Lösung von (1.2) ergibt sich dann als $u = u_0 + u_g$. Die Formulierung (1.3) führt also auf das Ersatzproblem

Finde $u_0 \in H^1_{\Gamma_0,0}(\Omega)$, so dass

$$\mathcal{A}(u_0, v) = \widehat{\mathcal{F}}(v) \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_0,0}(\Omega), \tag{1.4}$$

mit $\widehat{\mathcal{F}}(v) := \mathcal{F}(v) - \mathcal{A}(u_g, v)$.

Um das ursprüngliche Randwertproblem (1.1) zu lösen, muß also zunächst eine beliebige Funktion $u_g \in H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega)$ konstruiert werden. Die Lösung ergibt sich dann mit Hilfe von (1.4).

1.2 Das Lemma von Lax-Milgram

In dieser Sektion betrachten wir die Eindeutigkeit und Lösbarkeit von Variationsgleichungen in Hilberträumen. Wir werden sehen, dass unter gewissen, auch in der Praxis sinnvollen, Voraussetzungen die Variationsaufgabe (1.4) ein gut gestelltes Problem im Sinne von Hadamard ist.

Sei V ein Hilbertraum mit innerem Produkt $(\cdot,\cdot)$ und der dadurch induzierten, zugehörigen Norm $\|u\| := \sqrt{(u,u)}$, weiterhin seien $\mathcal{A}(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbf{R}$ eine stetige Bilinearform auf V und $\mathcal{F}(\cdot) : V \to \mathbf{R}$ ein stetiges lineares Funktional auf V. Wir betrachten folgendes lineares Variationsproblem:

Finde ein $u \in V$, so dass

$$\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in V. \tag{1.5}$$

Das folgende Lemma von P.D. Lax und A. Milgram ist eine einfache, aber wirkungsvolle Verallgemeinerung des Riesz'schen Darstellungssatzes, für einen Beweis vgl. [2, 3].

Lemma 1.1 (Lax-Milgram) *Die Bilinearform $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ sei stetig, d.h.*

$$\exists M \equiv const > 0 \quad |\mathcal{A}(u,v)| \leq M \, \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V,$$

und $V-$elliptisch, d.h.

$$\exists \alpha \equiv const > 0 \quad \mathcal{A}(u,u) \geq \alpha \, \|u\|^2 \quad \forall u \in V.$$

Dann hat die Variationsgleichung (1.5) eine eindeutige Lösung u und es gilt

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\mathcal{F}\|.$$

Aus der letzten Ungleichung im Lemma von Lax–Milgram folgt die stetige Abhängigkeit der Lösung von den rechten Seiten. Somit liegt ein gut gestelltes Problem im Sinne von Hadamard vor.

Nach Satz 1.1 sind die Räume $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$ und $H^1_{\Gamma_0,0}(\Omega)$ Hilberträume, jedoch nicht der Raum $H^1_{\Gamma_0,g_0}(\Omega)$!

Aufgabe 1.1 *Man wende das Lemma von Lax–Milgram auf die Variationsprobleme der Sektion 1.1 an. Dabei soll der Leser sich überlegen, welche Normen und inneren Produkte benutzt werden müssen.*

1.3 Das Galerkin-Verfahren

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Näherungsverfahren zur Lösung von Variationsgleichungen: das Galerkin–Verfahren. Im Gegensatz zum Verfahren der finiten Differenzen, bei dem der Differentialoperator diskretisiert wird, betrachten wir beim Galerkin–Verfahren den kontinuierlichen Operator bzw. die zugehörige Bilinearform und diskretisieren den Testraum V.

Wir stellen im Folgenden dieselben Anforderungen an die Bilinearform $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$, die Linearform $\mathcal{F}(\cdot)$ und den Raum V. Mit $u \in V$ bezeichnen wir die Lösung der Variationsgleichung (1.5).

Sei V_h ein endlichdimensionaler Unterraum von V. Dann heißt u_h Galerkin–Näherung von u, falls

$$\mathcal{A}(u_h, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in V_h. \tag{1.6}$$

Ist $(v_i)_{i=1,\ldots,M}$ eine Basis des Teilraums V_h, so existiert eine Entwicklung von u_h in dieser Basis, d.h. es existieren reelle Koeffizienten $(d_k)_{k=1,\ldots,M}$ mit

$$u_h = \sum_{i=1}^{M} d_i v_i.$$

Statt das Problem (1.6) zu betrachten, genügt es

$$\mathcal{A}(u_h, v_i) = \mathcal{F}(v_i) \quad \forall v_i, i = 1, \ldots, M, \tag{1.7}$$

zu lösen.

Setzen wir die Basisentwicklung $u_h = \sum_{i=1}^{M} d_i v_i$ in die Variationsformulierung (1.7) ein, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$K\, d = F \tag{1.8}$$

mit $K = (\mathcal{A}(v_i, v_j))_{i,j=1,\dots,M}$, $d = (d_i)_{i=1,\dots,M}$ und $F = (F(v_i))_{i=1,\dots,M}$.

Beim Galerkin–Verfahren löst man die Variationsgleichung (1.5) durch Einschränkung auf einen endlichdimensionalen Teilraum und das Aufstellen und Lösen eines linearen Gleichungssystems.

Der nächste Satz zeigt, dass die Galerkin–Näherung die Bestapproximation aus V_h an $u \in V$ ist.

Satz 1.2 *Die Voraussetzungen von Lemma 1.1 seien erfüllt, dann existiert u_h und ist eindeutig bestimmt. Weiterhin gelten die Abschätzungen*

$$\|u_h\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{F}\|, \quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\| \tag{1.9}$$

Das Verfahren der finiten Elemente ist ein Galerkin–Verfahren, bei dem die Basisfunktionen $v_i, i = 1, \dots, N$ mit Hilfe einer Zerlegung des Gebiets Ω in kleinere Teilgebiete mit dem Durchmesser h konstruiert werden. In diesen kleinen Teilgebieten werden die Funktionen aus V durch einfache Funktionen mit kleinem Träger, in der Regel Polynome niedrigen Grades, approximiert.

1.4 Das einzelne finite Element

Wir benutzen hier die Definition eines finiten Elements nach Ciarlet [4].

Definition 1.1 *Ein Finites Element ist ein Tripel $(E, \mathcal{P}, \mathcal{N})$, wobei*

(i) $E \subset \mathbf{R}^d$ *ein Lipschitz-Gebiet,*

(ii) $\mathcal{P}$ *ein endlichdimensionaler Teilraum von $C(\overline{E})$, dem Raum der stetigen Funktionen auf $\overline{E}$ und*

(iii) $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ *eine Basis für $\mathcal{P}'$, den Dualraum von $\mathcal{P}$,*

ist.

Bemerkung 1.2 *(i) E ist in der Regel ein einfaches Gebiet, z.B. ein Dreieck (bzw. Tetraeder) oder ein Viereck (bzw. Quader). Häufig bezeichnet man auch E selbst als Finites Element oder einfach als Element.*

(ii) $\mathcal{P}$ besteht in der Regel aus Polynomen niedrigen Grades. Die Dimension m von $\mathcal{P}$ ist üblicherweise klein, etwa $3 - 20$.

(iii) $\mathcal{N}$ besteht meist aus Funktionsauswertungen bzw. Auswertung von Ableitungen in bestimmten Punkten von $\overline{E}$, den Knoten. Die Funktionale in $\mathcal{N}$ nennt man auch Freiheitsgrade des Elements.

Definition 1.2 *Sei $(E, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ein Finites Element und sei $(\phi_i)_{i=1,\ldots,m}$ eine Basis von $\mathcal{P}$, die dual ist zu $\mathcal{N}$, d.h. $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}, i,j = 1,\ldots,m$. Die Basis $(\phi_i)_{i=1,\ldots,m}$ heißt Knotenbasis oder nodale Basis.*

1.5 Beispiele Finiter Elemente

Zunächst beschränken wir uns auf zweidimensionale Elemente. Zur Beschreibung der verschiedenen Elemente geben wir jeweils das zugehörige Tripel $(E, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ an.

1.5.1 Lineare Dreiecks-Elemente (Lagrange)

Das Element-Gebiet ist hier ein Dreieck mit den Ecken $a_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$. Wir wählen $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$, d.h. den Raum der linearen Polynome, also $m = \dim\mathcal{P} = 3$ und wir setzen $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3\}$ mit $N_i(p) = p(a_i), i = 1, 2, 3$.

Für das Einheitsdreieck ergibt sich als Knotenbasis $(\phi_i)_{i=1,2,3}$

$$\phi_1(x,y) := 1 - x - y, \quad \phi_2(x,y) := x, \quad \phi_3(x,y) := y.$$

1.6 Zusammensetzen Finiter Elemente

Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet und seien $(E_l, \mathcal{P}_l, \mathcal{N}_l), l = 1,\ldots,L$ Finite Elemente mit

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{l=1}^{L} \overline{E}_l$$

und $E_l \cap E_k = \emptyset$ für $l \neq k$.

Definition 1.3 *Eine Familie Finiter Elemente $(E_l, \mathcal{P}_l, \mathcal{N}_l), l = 1,\ldots,L$ heißt affin, wenn jedes Element der Familie affines Bild eines einzigen Elementes ist. Dieses Element wird auch als Referenzelement bezeichnet.*

Beispiel 1.1 *Bei linearen Dreieckselementen wählt man üblicherweise das Einheitsdreieck als Referenzelement. Die affine lineare Abbildung lautet dann*

$$\begin{aligned} T &: \widehat{E} \to E \\ T\widehat{x} &:= B\widehat{x} + b \end{aligned}$$

mit

$$B = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

wobei $\widehat{E}$ das Einheisdreieck bezeichnet und das jeweilige Element E durch die Ecken $a_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ gegeben ist.

Definition 1.4

(i) *Eine Familie* $(E_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{N}_i)_{i=1,\dots,L}$ *heisst verträglich, wenn für jeden Knoten a, der sowohl zu* E_i *als auch zu* E_k *gehört gilt:* $\mathrm{span}\{\mathcal{N}_{ai}\} = \mathrm{span}\{\mathcal{N}_{ak}\}$, *wobei* $\mathcal{N}_{ai} := \{N_j^i \in \mathcal{N}_i : N_j^i$ *gehört zu Knoten* $a\}$.

(ii) *Ist eine Familie verträglich, so lassen sich zu jedem Knoten a dieser Familie Freiheitsgrade* $\varphi_1, \dots, \varphi_t$ *finden, so dass* $\mathrm{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_t\} = \mathrm{span}\{\mathcal{N}_{ai}\}$ *für jedes Element* E_i, *zu dem der Knoten a gehört. Die Menge der* $(\varphi_j)_{j=1,\dots,M}$, *bildet die Menge der globalen Freiheitsgrade.*

1.7 Implementierung

In diesem Abschnitt soll die übliche Vorgehensweise bei der Programmierung des Verfahrens der Finiten Elemente beschrieben werden. Wir verwenden dabei die Bezeichnungen der vorhergehenden Sektionen. Das Lösen einer Differentialgleichung mit Hilfe der Finiten Elemente kann in drei Abschnitte gegliedert werden:

(i) Gittererzeugung

(ii) Aufstellen des Gleichungssystems (Steifigkeitsmatrix, Lastvektor)

(iii) Lösen des Gleichungssystems und evtl. Bearbeitung der Lösung (Visualisierung, etc.)

1.7.1 Gittererzeugung

Es gibt viele Artikel, Bücher und Programme zur Gittererzeugung für geometrisch komplexe Gebiete, s. z.B. [6]. Wir beschränken uns der Einfachheit halber jedoch auf leicht zu zerlegende Gebiete, z.B. Kreis oder Rechteck, bzw. Gebiete, die sich daraus zusammensetzen.

Unabhängig von der Geometrie des Gebiets benötigen wir gewisse Daten der Triangulierung. Wir folgen im Wesentlichen den Bezeichnungen in Axelsson/Barker [1][Kap. 5]. Sei Ω ein Gebiet und es sei ein Gitter mit L Elementen und M Knoten gegeben. Weiterhin sei $\{\Phi_1, \dots, \Phi_M\}$ die zugehörige Knotenbasis, vgl. Definition 1.2. Desweiteren unterscheiden wir zwischen Knoten, die im Innern des Gebiets oder auf einem Teil des Randes mit vorgeschriebenen Neumann-Randwerten liegen und Knoten, die auf einem Randstück mit vorgeschriebenen Dirichlet-Randdaten liegen. Dies ist sinnvoll, da die Lösung in den Knoten mit Dirichletbedingungen schon bekannt sind, also anders behandelt werden müssen als „echte“ Unbekannte. Im Folgenden bezeichnen wir die Anzahl der Knoten auf Γ_0 mit M_0, die Indexmenge der Knotennummern von Knoten auf Γ_0 mit J_0. Die Anzahl der Knoten in $\Omega \cup \Gamma_1$ ist N und die Indexmenge aller Knotennummern von Knoten in $\Omega \cup \Gamma_1$ wird mit J bezeichnet.

Zum Aufstellen des Gleichungssystems müssen alle Knoten durchlaufen werden. Dabei hat es sich als sinnvoll herausgestellt, elementweise vorzugehen, d.h. es werden nacheinander alle Elemente durchlaufen und pro Element werden die zugehörigen Knoten abgearbeitet. Natürlich werden bei dieser Vorgehensweise die meisten Knoten mehrmals besucht. Um dieses Verfahren zu implementieren, benötigen wir also eine globale Knoten- und eine globale Elementnummerierung, sowie eine lokale Knotennummerierung pro Element. Die global Knotennummerierung kann beliebig erfolgen, sie muss nur die Bedingung erfüllen, dass jedem Knoten genau eine (globale) Nummer zugeordnet wird. Analog müssen die Elemente durchnummeriert werden. Innerhalb jedes Elements führen wir noch eine lokale Knotennummerierung ein, die - für jedes Element gleich - die Knoten, welche zum Element gehören, (lokal) nummeriert. Bei affinen Finite-Element-Familien lässt sich die lokale Knotennummerierung bequem über das Referenzelement definieren. Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors brauchen wir auch die Koordinaten der jeweiligen Knoten, schließlich müssen auch noch die Daten der Randknoten erfasst werden. Diese Daten werden alle in verschiedenen Listen gespeichert, die wir hier der Einfachheit halber als Arrays darstellen:

ELNODE	$L \times m$ Array, das die globalen Knotennummern für alle Elemente enthält
NODECO	$M \times 2$ Array, das die Koordinaten aller Knoten enthält
BONODE	$M_0 \times 1$ Array, das die Indexmenge J_0 enthält
EDGE	$L_1 \times 2$ enthält die Daten der Elemente, die auf Γ_1 liegen.

Die Arrays sind dabei wie folgt aufgebaut:

ELNODE		NODECO	
Element-Nr.	Element-Knoten	Knoten-Nr.	Knoten-Koordinaten
1	$E_1^1, \ldots, E_m^1$	1	(x_1, y_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L	$E_1^L, \ldots, E_m^L$	M	(x_M, y_M)

Dabei enthält $E_i^l, i = 1, \ldots, m, l = 1, \ldots, L$ die globale Knotennummer des $i-$ten lokalen Knotens im $l-$ten Element.

Die Randdaten werden in den folgenden beiden Listen gespeichert:

BONODE		EDGE	
Randknoten-Nr.	Knoten-Nr.(global)	Randelement-Nr.	Knoten (lokal)
1	i_1	1	RE_1^{First}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
M_0	i_{M_0}	L_1	$RE_{L_1}^{\text{First}}$

Die Reihenfolge der Randknoten in BONODE und die der Randelemente in EDGE ist willkürlich. Die Liste BONODE enthält zu jeder Randknotennummer die entsprechende globale Knotennummer. In EDGE findet sich zu jeder Randelementnummer die zugehörige lokale Knotennummer des ersten Randknotens des jeweiligen Elements. Mit „ersten“ ist gemeint, dass alle weiteren Randknoten dieses Elements im mathematisch positiven Drehsinn nach diesem Knoten kommen. Wir weisen darauf hin, dass eine Ecke des Gebiets Ω zu Elementen führen kann, die mehr als einen Elementrand auf Γ_1 haben.

Beispiel 1.2 Vorgehensweise zur Triangulierung eines Kreises wie auf Aufgabenblatt 1 beschrieben

1.7.2 Aufstellen des Gleichungssystems

Wir betrachten nun das Variationsproblem (1.6)

$$\mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{1.10}$$

Sei eine affine verträgliche Familie Finiter Elemente $(E_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{N}_i)_{i=1,\ldots,L}$ gegeben. Die zugehörigen globalen Freiheitsgrade bezeichnen wir mit $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,M}$, die globalen Knoten–Basisfunktionen mit $(\phi_j)_{j=1,\ldots,M}$. Somit gilt $V_h = \operatorname{span}_{j=1}^{M}\{\phi_j\}$.

Um unser Programm möglichst modular zu halten, werden wir die Implementierung der Randbedingungen getrennt behandeln und uns zunächst nur mit den Teilen des Programms beschäftigen, bei denen über Ω integriert wird.

Sei $(E, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ein beliebiges Element der o.a. Familie und $(\Phi_{E,j})_{j=1,\ldots,m}$ die lokale Knotenbasis. Dann gilt für $u_h, v_h \in V_h$ eingeschränkt auf das Element E

$$u_h = \sum_{j=1}^{m} u_{E,j}\Phi_{E,j}, \quad v_h = \sum_{j=1}^{m} v_{E,j}\Phi_{E,j},$$

wobei mit $u_{E,j}, v_{E,j}$ die Werte von u_h, v_h in den Knoten des Elements E bezeichnet werden.

Wir betrachten zunächst nur Anteile der Variationsgleichung ohne Randbedingungen, d.h. $A_\Omega(\cdot,\cdot)$ und $\mathcal{F}_\Omega(\cdot)$. Beschränken wir weiterhin den Integrationsbereich auf E

Literaturverzeichnis

[1] O. Axelsson and V.A. Barker. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computation.* Academic Press, 1984.

[2] Dietrich Braess. *Finite Elemente.* Springer-Verlag, 2nd edition, 1997.

[3] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer-Verlag, 1994.

[4] Philippe G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland, 1978.

[5] C.W. Cryer. Numerik Partieller Differentialgleichungen II. Vorlesungsskript Sommersemester 1998.

[6] P.L. George. *Automatic Mesh Generation: Application to Finite Element Methods.* John Wiley & Sons, 1991.

[7] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* Teubner-Verlag, Stuttgart, 1986. Engl. Transl.: Elliptic Differential Equations. Theory and Numerical Treatment. Springer, New York, 1992.

[8] J.L. Lions and E. Magenes. *Non–Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Part I.* Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.

[9] J. Nečas. *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques.* Masson-Paris/Academia-Prague, 1967.

[10] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen.* B.G. Teubner Stuttgart, 1982.