Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Martin Drohmann, Stefan Girke

24.Mai 2012

Arbeitsblatt zum Praktikum

Scientific Computing

SS 2012 — Blatt 3

Abgabe: 5.Juni 2012 per Email

Ziel des Aufgabenblattes ist, einen ersten Einblick in die Finite-Elemente-Methode (in rbmatlab) zu bekommen.

Aufgabe 3.1 (Verständnisfragen FEM)

- Geben Sie die Basisfunktionen $\phi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ des linearen, simplizialen Lagrange-Elements bzgl des Referenzkoordinaten explizit an.
- Warum gibt es keine Lagrange-Elemente der Ordnung 0?
- Wie viele Basisfunktionen hat ein simpliziales Lagrange-Element fünfter Ordnung in 2D?

Zusatzfragen*

- Wie erhält man aus der Poisson-Gleichung in der klassischen Formulierung $-\Delta u = f$ die Variationsformulierung $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi \quad \forall \varphi$?
- Zeigen Sie, dass die schwache Ableitung von $|\cdot|$ die Signumsfunktion sign ist.

Aufgabe 3.2 (simpliziales, lineares Lagrange-Element)

(a) Schreiben Sie eine Interface-Klasse `FiniteElement` mit den folgenden beiden Methoden:

- `x=eval(coord)` zum Auswerten aller Basisfunktionen,
- `x=jacobian(coord)` zum Auswerten des Gradienten aller Basisfunktionen.

(b) Schreiben Sie eine Klasse `LinearLagrangeReferenceElement`, die von der Interface-Klasse `FiniteElement` abgeleitet ist, mit den folgenden beiden Methoden:

- `x=eval(coord)` zum Auswerten aller drei Basisfunktionen des linearen Lagrange-Elements für das Referenzelement,

- `x=jacobian(coord)` zum Auswerten des Gradienten aller drei Basisfunktionen des linearen Lagrange-Elements für das Referenzelement.

(c) Nun sollen die Basisfunktionen eines allgemeinen Dreiecks T mit Eckpunkten a_1, a_2 und a_3 ausgewertet werden:

Dazu sei $F : \hat{T} \to T, x \mapsto Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige affine Abbildung des Referenzelements auf das allgemeine Dreieck T mit $\det A \neq 0$ mit $F(e_{j-1}) = a_j$, $j = 1, 2, 3$. Die Matrix A ist definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{21} - a_{11} & a_{31} - a_{11} \\ a_{22} - a_{12} & a_{32} - a_{12} \end{pmatrix}$$

und der Vektor b durch

$$b = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie eine Klasse `LinearLagrangeElement` mit den folgenden Methoden:

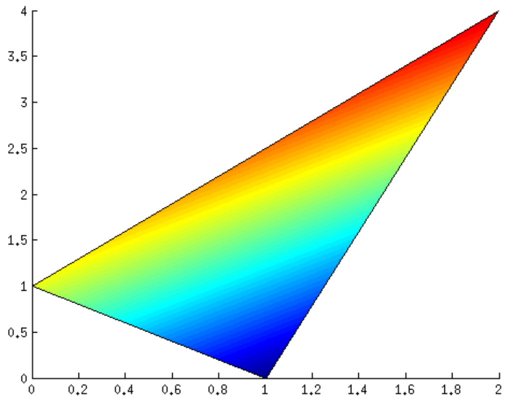
- einen Konstruktor, der die Koordinaten a_1, a_2 und a_3 als Eckpunkte des Dreiecks T entgegennimmt,
- `x=eval(coord)` zum Auswerten aller drei Basisfunktionen des linearen Lagrange-Elements,
- `x=jacobian(coord)` zum Auswerten des Gradienten aller drei Basisfunktionen des linearen Lagrange-Elements,
- die Methode `coord = coordinates()`, die die Koordinaten a_1, a_2 und a_3 zurückgibt.

Schreiben Sie zunächst die private Methode `A=Transf(a1,a2,a3)`, die zu gegebenen Koordinaten `a1`, `a2` und `a3` eines allgemeinen Dreiecks die Transformationsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Referenzabbildung $F_T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax + b$ ausgibt.

(d) Schreiben Sie nun die Klasse `LocalFunction` mit den folgenden Methoden

- einen Konstruktor, dem ein Objekt vom Typ `LinearLagrangeElement` übergeben wird.
- `setDofs(u1,u2,u3)`, zum Setzen der Freiheitsgrade der lokale Funktion.
- `print()` zur visuellen Ausgabe der Basisfunktionen bzw. lokalen Funktion. Verwenden Sie `set(cga)` oder `set(gca, 'CLim', [0, 10])` zum Anzeigen einer Zeichenfläche und die Funktion `patch(xdata, ydata, zdata,...)` zum Zeichnen eines Dreiecks in der Zeichenfläche. Dabei sollen die Daten interpoliert werden.

Dieses Klassenkonzept ist ein Vorschlag. Sie können auch eigene Ideen für ein alternatives Klassenkonzept einbringen. So sollte nachher die Ausgabe für ein Dreieck mit Eckpunkten $(1,0)$, $(0,1)$ und $(2,4)$ und Funktionswerten 0, 30 und 45 aussehen:



Aufgabe 3.3 (Diskrete Funktionen in rbmatlab)
Ziel dieser Aufgabe ist, eine diskrete Funktion auf einem Dreiecksgitter in matlab darzustellen. Gehen Sie wie folgt vor:

- Erstellen Sie ein 2D-Gitter mithilfe der Funktion `triagrid(param)` der Größe $[-1,1] \times [-1,1]$ und je 5 Unterteilungen in x- und y-Richtung.
- Öffnen Sie im „Workspace“ mit einem Doppelklick das Gitter und versuchen Sie die Ausgabe zu verstehen. (Es sollten mehrere Fenster mit Diagrammen angezeigt werden.)
- Erstellen Sie ein Fem-Info-Objekt mit skalaren, linearen Lagrange-Finite-Elementen, indem Sie die Funktion `feminfo(dmodel,grid)` aufrufen.
- Mit dem Fem-Info-Objekt können sie nun eine diskrete Funktion durch Aufruf der Funktion `fem_discfunc(dofs,df_info)` erstellen. Wählen Sie zunächst `dofs=[]`.
- Plotten Sie die diskrete Funktion mit `plot_discfunc(uh,params)`.
- Weisen Sie den dofs der diskreten Funktion einen beliebigen Wert zu, z.B. ihre Dof-Nr. (`dofs(i)=i`), und plotten Sie die diskrete Funktion erneut.