Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Martin Drohmann, Stefan Girke

05.04.2012

Arbeitsblatt zum Praktikum

Scientific Computing

SS 2012 — Blatt 0

Abgabe: 10.04.2011 per Email

Aufgabe 0.1 (Installation von Matlab/rbmatlab)

Öffnen Sie die Seite
`http://wwwmath.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/Praktikum_RBmatlab_SS12/`
und führen Sie folgende Schritte durch:

(a) Folgen Sie der Installationsanweisung für Matlab unter dem Punkt „Anleitungen, etc“.[1]

(b) Folgen Sie dem Link „Dokumentation von Mini-RBmatlab“ und führen Sie die dort angegebenen Schritte aus.

(c) Werfen Sie einen kurzen Blick in die Dokumentation von rbmatlab.

Aufgabe 0.2 (Poisson-Problem)

Wir betrachten das folgende Poisson-Problem:
Finde u auf $[0,1]$, sodass

$$\begin{aligned} -\Delta(ku) &= 1 && \text{auf } [0,1], \\ u &= 0 && \text{auf } \partial[0,1], \end{aligned}$$

wobei $k \in [0.01, 1.0]$ ein Parameter sei.

Eine Approximation u_i soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren bestimmt werden: Wir wählen dazu ein Gitter mit Diskretisierungspunkten $x_i = i \cdot h$ und Gitterweite $h = 0.01$ für $i = 0, \cdots, 100$. Dann gilt:

$$1 = k\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = k\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} \qquad \forall i = 0, \cdots, 100.$$

[1] Beachten Sie zuhause, dass bei einer Installation außerhalb des Uni-Netzwerks eine VPN-Verbindung existieren muss.

Implementieren Sie in der Datei `exercise0_model` die Funktion `my_detailed_simulation(model,model_data)`, d.h. bestimmen Sie u_i für $i = 0, \dots, 100$. Überlegen Sie sich zunächst, wie die Massematrix D und die rechte Seite F aussehen.

Zusatzaufgabe 0.3 (Poisson-Problem II)

Erweitern Sie die letzte Aufgabe um einen weiteren Term:
Finde u auf $[0, 1]$, sodass

$$-\Delta(ku) + mu = 1 \qquad \text{auf } [0,1], \tag{1}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial[0,1], \tag{2}$$

wobei $k \in [0.01, 1.0]$ und $m \in [0, 10]$ frei wählbare Parameter seien.
Verwenden Sie zum Lösen das Newton-Verfahren, d.h. führen Sie die Iteration für $\nu = 0, \dots, \nu_{\max}$

$$f'(u^\nu)\left(u^{\nu+1} - u^\nu\right) = f(u^\nu)$$

durch, wobei die Funktion f das Residuum $\Delta(ku(x)) + mu(x) - 1$ des Problem (1)-(2) bemisst.
Wählen Sie eine geeignete Abbruchbedingung und geben Sie anschließend die Anzahl der benötigten Iterationen für das Newton-Verfahren aus.

Zusatzaufgabe 0.4 (Hilberträume)
Sei $\Omega = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie

(a) Der Raum $X := C^0(\Omega)$ mit $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ist kein Hilbertraum.

(b) Der Raum $X := H^1(\Omega)$ mit $(f, g) = \int_0^1 \frac{d}{dx}f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx$ ist kein Hilbertraum.

Zusatzaufgabe 0.5 (Orthogonale Projektion und Bestapproximation)
Sei X ein reeller Hilbertraum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein eindeutiges $P : X \to Y$ mit $\|x - Px\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$ für alle $x \in X$.

(b) Es existiert ein eindeutiges $P : X \to Y$ mit $(x - Px, y) = 0$ für alle $x \in X$, $y \in Y$, und dieses ist identisch zu P aus (a).

(c) $P \in L(X)$ mit $\|P\| \leq 1$ und P ist eine Projektion.

(d) Sei $n = \dim Y$ und eine Orthonormalbasis $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ gegeben. Dann ist die Projektion äquivalent definiert durch $Px = \sum_{i=1}^n (\varphi_i, x)\varphi_i$ für alle $x \in X$.

Schicken Sie die fertigen Programme an
`mdrohmann@uni-muenster.de` **und** `stefan.girke@uni-muenster.de`.