

# Seminarvortrag zum Thema CT-Messungen mit fächerförmigen Strahlen

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik  
Einsteinstraße 62, Münster

09.06.2010

# Gliederung

- 1 Integralgeometrie
  - parallele Strahlen
  - kegelförmige Strahlen
- 2 Scanning
  - Fan Beam Scanning (2D)
  - Cone Beam Scanning (3D)
- 3 Rekonstruktionsalgorithmen
  - Standard Fan Beam
  - Linearer Fan Beam
  - FDK-Approximationsformel
- 4 Literatur

# Transformierte für parallele Strahlen

## Definition

Für  $\Theta \in S^{n-1}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  ist die **Radon-Transformierte** definiert durch

$$(Rf)(\Theta, s) = \int_{H(\Theta, s)} f(x) dx$$

mit der Hyperebene

$$H(\Theta, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \Theta = s\}$$

## Definition

Für  $\Theta \in S^{n-1}$ ,  $x \in \Theta^\perp$  ist die **Ray-Transformierte** definiert durch

$$(Pf)(\Theta, x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + t\Theta) dt$$

# Transformierte für kegelförmige Strahlen

## Definition

Für  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $\Theta \in \mathcal{S}^{n-1}$  ist die **Cone Beam-Transformierte**  $D$  von  $f$  definiert durch:

$$(Df)(a, \Theta) := \int_0^\infty f(a + t\Theta) dt$$

## Unterschied zur Ray-Transformierten nur in der Notation

### Ray-Transformierte:

Zu gegebenem Winkel  $\Theta$  gibt  $x$  an, welcher der parallelen Strahlen zu betrachten ist.

### Cone Beam-Transformierte:

Zu gegebener Quelle  $a$  gibt mir  $\Theta$  an, welcher Strahl des Kegels zu betrachten ist.

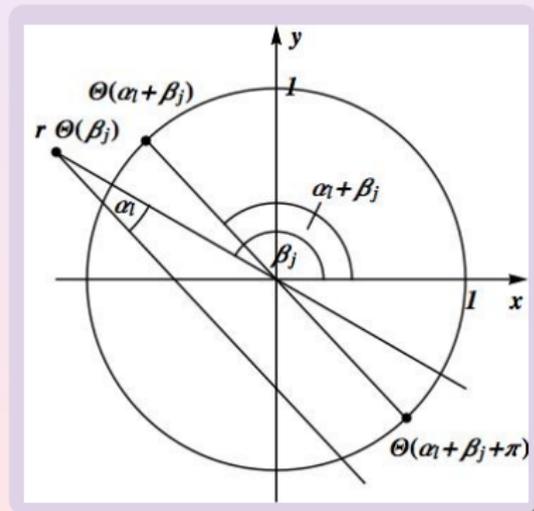
# Fan Beam Scanning (2D)

## Messwerte

$$g_{jl} = (Df)(r\Theta(\beta_j), \Theta(\alpha_l + \beta_j + \pi)), \quad j=0, \dots, p-1, \quad l=-q, \dots, q$$

## Notation

- $r\Theta(\beta_j)$  Position der Strahlenquelle
- $\beta_j$  Winkel zwischen dem Zentralstrahl und der positiven x-Achse
- $\alpha_l$  Winkel zwischen dem zentralen und dem l-ten Strahl



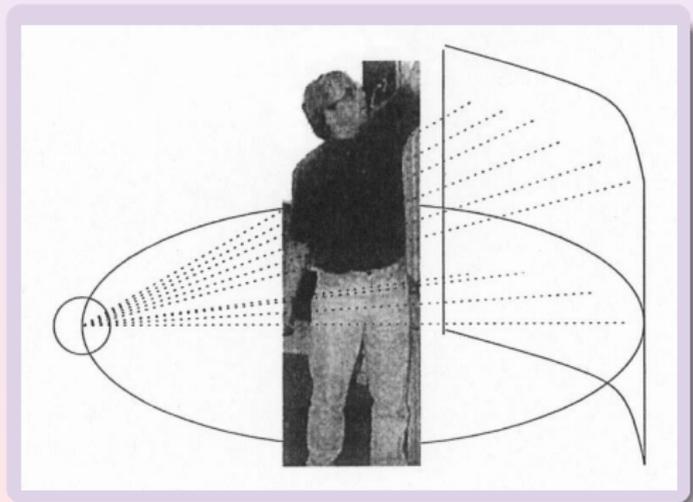
# Cone Beam Scanning

## 3D-Scanning

Quelle umkreist zusammen mit einem **2D Detektorfeld** das Objekt.

### Anzahl der gemessenen Strahlen

- $\approx 100$  in der industriellen Tomographie
- $10^6 - 10^8$  in radiologischen Anwendungen



# Standard Fan Beam

## Sachverhalt

**gekrümmtes** 1D Detektorfeld

## Messwerte

$$g(\beta_j, \alpha_l) = (Rf)(\Theta, r \sin \alpha_l)$$

mit  $\Theta = \Theta(\beta_j + \alpha_l - \frac{\pi}{2})$

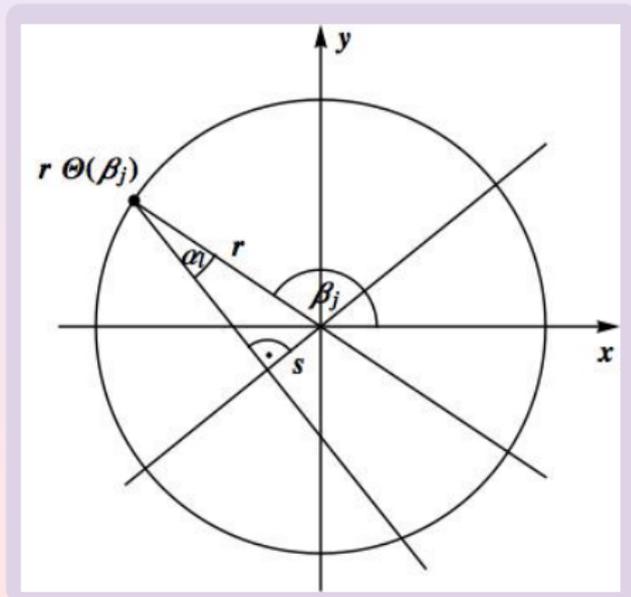
$$\beta_j = j\Delta\beta$$

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{p}$$

$$j = 0, \dots, p-1$$

$$\alpha_l = l\Delta\alpha$$

$$l = -q, \dots, q$$



# Standard Fan Beam

## Theorem

$$(R^* h) * f = R^* (h * Rf),$$

$$f \in S(\mathbb{R}^n), g \in S(C^n)$$

## Faltung und Rückprojektion

$$(R^* h * f)(x) = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(x \cdot \Theta - s) Rf(\Theta, s) ds d\varphi$$

$$\text{mit } \varphi = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}, \quad s = r \sin \alpha$$

## Transformation in die $\alpha$ - $\beta$ -Ebene

$$\frac{\partial(\varphi, s)}{\partial(\beta, \alpha)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & r \cos \alpha \end{vmatrix} = r \cos \alpha \quad (\text{Transformationsatz})$$

$$\Rightarrow (R^* h * f)(x) = r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(x \cdot \Theta - r \sin \alpha) g(\beta, \alpha) \cos \alpha d\alpha d\beta$$

$$\text{mit } \Theta = \Theta(\beta + \alpha - \frac{\pi}{2})$$

# Diskretisierung des Integrals

## Formel

$$(R^* h * f)(x) = r \Delta \alpha \Delta \beta \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{l=-q}^q h(x \cdot \Theta - r \sin \alpha_l) g(\beta_j, \alpha_l) \cos \alpha_l$$

$$\text{mit } \Theta = \Theta(\beta_j + \alpha_l - \frac{\pi}{2})$$

► zug. Gitter

## Formel für parallele Strahlen zum Vergleich

$$(R^* h * f)(x) = \Delta \varphi \Delta s \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{l=-q}^q h(x \cdot \Theta_j - s_l) g(\Theta_j, s_l)$$

## Bemerkung

Die Komplexität (Rechenaufwand) ist  $\mathcal{O}(\Omega^4)$

► Begründung

# Komplexität verringern

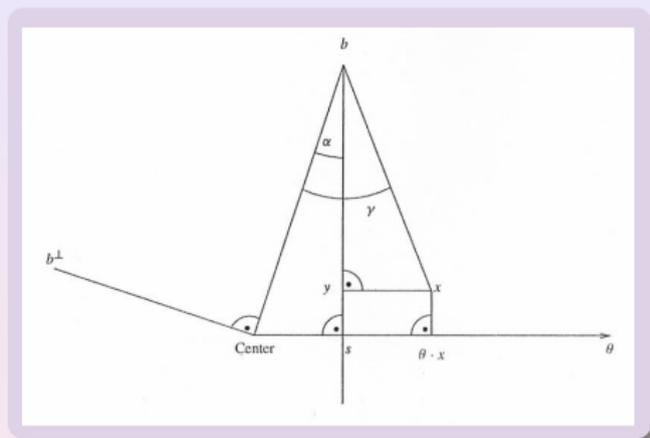
## Notation

$b$  Quellenposition

$\gamma$  Winkel zwischen  $x - b$   
 und  $-b$

$$b_{\perp} = r\Theta(\beta + \frac{\pi}{2})$$

$y$  Orthogonale Projektion  
 von  $x$  auf den  $l$ -ten Strahl



## Rechnung

$$|x - y| = |b - x| \sin |\gamma - \alpha| \Rightarrow |x \cdot \Theta - s| = |b - x| \sin |\gamma - \alpha|$$

$h$  ist homogen vom Grad -2

$$\Rightarrow h(x \cdot \Theta - s) = |b - x|^{-2} h_{|b-x|}(\sin(\gamma - \alpha))$$

# Komplexität verringern

## Rechnung

Eingesetzt in stetige Formel:

$$(R^* h * f)(x) = r \int_0^{2\pi} |b-x|^{-2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h_{|b-x|}(\sin(\gamma-\alpha)) g(\beta, \alpha) \cos \alpha d\alpha d\beta$$

## Approximation

Ersetze  $|b-x|$  durch  $r$ , d.h.  $|x| \ll r$

$$(R^* h * f)(x) = r \int_0^{2\pi} |b-x|^{-2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h_r(\sin(\gamma-\alpha)) g(\beta, \alpha) \cos \alpha d\alpha d\beta$$

## Bemerkung

Die Komplexität ist  $\mathcal{O}(\Omega^3)$

# Algorithmus

## Algorithmus für die gefilterte Rückprojektion

Daten Werte  $g_{j,l} = g(\beta_j, \alpha_j)$ ,  $j = 0, \dots, p-1$ ,  $l = -q, \dots, q$

1. Schritt Für  $j = 0, \dots, p-1$  berechne die diskreten Faltungen

$$h_{j,k} = \Delta\alpha \sum_{l=-q}^q h_r(\sin(\alpha_k - \alpha_l)) g_{j,l} \cos\alpha_l, \quad k = -q, \dots, q$$

2. Schritt Sei  $b_j = r\Theta(\beta_j)$ ,  $b_{j,\perp} = r\Theta(\beta_j + \frac{\pi}{2})$ . Berechne für jeden Rekonstruktionspunkt  $x$  die gefilterte Rückprojektion

$$f_{FB}(x) = r\Delta\beta \sum_{j=0}^{p-1} |b_j - x|^{-2} ((1 - \vartheta)h_{j,k} + \vartheta h_{j,k+1})$$

wobei  $k = k(j, x)$  und  $\vartheta = \vartheta(j, x)$  bestimmt sind durch

$$\gamma = \pm \arccos \frac{(b_j - x) \cdot b_j}{|b_j - x| |b_j|},$$

$$t = \frac{\gamma}{\Delta\alpha} - \gamma, \quad k = |t|, \quad \vartheta = t - k$$

# Linearer Fan Beam

## Sachverhalt

**gerades** 1D Detektorfeld

## Messwerte

$$g(\beta, y) = (Rf)(\Theta(\varphi), s)$$

$$\text{mit } \varphi = \beta + \arctan \frac{y}{r} - \frac{\pi}{2}$$

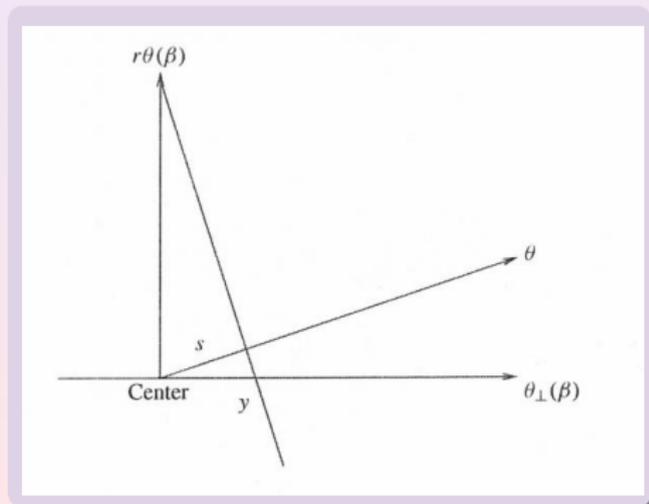
$$s = \frac{ry}{(r^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\beta_j = j\Delta\beta$$

$$y_l = l\Delta y$$

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{p}$$

$$l = -q \dots q$$



# Transformation

Transformation  $\varphi - s$ - Ebene  $\rightsquigarrow \beta - y$ - Ebene

$$\left| \frac{\partial(\varphi, s)}{\partial(\beta, y)} \right| = \frac{r^3}{(r^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{Transformationsatz})$$

$$\Rightarrow (R^* h * f)(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} h(x \cdot \Theta(\varphi) - s) g(\beta, y) \frac{r^3 dy d\beta}{(r^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

## Komplexität verringern

Transformation von  $x \cdot \Theta(\varphi) - s$  in die  $\Theta(\beta) - \Theta_{\perp}(\beta)$  Ebene liefert:

$$x \cdot \Theta(\varphi) - s = c(z - y)$$

mit  $c = \frac{r - x \cdot \Theta(\beta)}{y^2 + r^2}^{1/2}$ ,  $z = \frac{rx \cdot \Theta_{\perp}(\beta)}{r - x \cdot \Theta(\beta)}$

► Beweis

# Transformation

## Komplexität verringern

Mit der Homogenitätseigenschaft von  $h$  ergibt sich

$$(R^* h * f)(x) = r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(r-x \cdot \Theta(\beta))^2} \int_{-\rho}^{\rho} h_c(z-y) g(\beta, y) \frac{dy}{(r^2+y^2)^{1/2}} d\beta$$

## Annahme: $c \sim 1$

bedeutet: Objekt liegt in Zentrumsnähe

▶ mathematisch

$$(R^* h * f)(x) = \int_{S^1} \frac{r^2}{(r-x \cdot \Theta)^2} \int_{-\rho}^{\rho} h\left(\frac{rx \cdot \Theta_{\perp}}{r-x \cdot \Theta} - y\right) g(\Theta, y) \frac{rdy}{(r^2+y^2)^{1/2}} d\theta$$

# FDK-Approximationsformel (1984)

## Approximationsformel von Feldkamp, Davis und Kress

- wichtigste Formel für das Cone Beam-Scanning
- Kreis mit Radius  $r$  als Quellenkurve in horizontaler Ebene
- Messwerte:  $g(\theta, y) = (Df)(r\theta, \frac{y-r\theta}{|y-r\theta|})$

## Idee

- Zu einer Strahlenquelle  $r\theta$  und einem Punkt  $x$  betrachte die Ebene, in der die Gerade durch  $r\theta$  und  $x$  liegt und die das Detektorfeld horizontal schneidet (LFB-Ebene).
- Gewichtung von  $f$  in dieser Ebene mittels LFB.
- Rückprojektion durch Integration über  $\theta$  (obwohl verschiedene LFB-Ebenen für verschiedene Winkel)

# FDK-Approximationsformel

## Problem

Verschiedene LFB-Ebenen für verschiedene Winkel!

## Lösung

Integriere trotzdem über alle Quellenpositionen (obwohl entsprechende Ebenen verschieden!)

## FDK-Approximationsformel

$$f(x) \sim \int_{S^1} \frac{r^2}{(r-x \cdot \Theta)^2} \int_{-\rho}^{\rho} h(y_2 - y'_2) g(\Theta, y'_2 \Theta_{\perp} + y_3 e_3) \frac{rdy'_2}{\sqrt{r^2 + y_2'^2 + y_3^2}} d\Theta$$

► Herleitung

# FDK-Approximationsformel

## Erwartung

Die Approximationsformel kann nur gut sein, wenn die Quelle unendlich weit von dem Objekt entfernt ist.

## Realität

Erstaunlicherweise ist die FDK-Approximationsformel schon gut, wenn die Quelle nicht unendlich weit(aber weit genug) vom Objekt entfernt ist.

Dies ist in standardmäßigen CT-Geräten der Fall.

**Natterer, Frank, Wübbeling, Frank:**  
*Mathematical Methods in Image Reconstruction*

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit



# $h$ ist homogen vom Grad $-2$

## Definition

$h$  ist homogen vom Grad  $-2$  bedeutet

$$h(t\sigma) = t^{-2}h(\sigma)$$

▶ back

# Gitter

## Gitter

Abstandsmatrix  $W = \begin{pmatrix} \Delta\beta & 0 \\ 0 & \Delta\alpha \end{pmatrix}$

zugehöriges Gitter  $L_W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \sum_{i=1}^2 k_i w_i : k_i \in \mathbb{Z}\}$

dabei ist  $w_i$  die  $i$ -te Spalte von  $W$

▶ back

# Komplexität $\mathcal{O}(\Omega^4)$

## Begründung

- Wir haben  $\mathcal{O}(\Omega^2)$  Bildpunkte.
- Für die Filterung und Rekonstruktion jedes Bildpunktes benötigen wir  $\mathcal{O}(pq)$  Rechenoperationen.
- $p$  und  $q$  hängen linear ab von  $\Omega$
- Das gibt einen Gesamtrechenaufwand von  $\mathcal{O}(\Omega^4)$

▶ back

## Beweis

$$\begin{aligned}\Theta(\varphi) &= (\Theta(\varphi) \cdot \Theta(\beta))\Theta(\beta) + (\Theta(\varphi) \cdot \Theta_{\perp}(\beta))\Theta_{\perp}(\beta) \\ &= \sin\alpha\Theta(\beta) + \cos\alpha\Theta_{\perp}(\beta)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(r^2 + y^2)^{1/2}}(y\Theta(\beta) + r\Theta_{\perp}(\beta))$$

$$x = (x \cdot \Theta(\beta))\Theta(\beta) + (x \cdot \Theta_{\perp}(\beta))\Theta_{\perp}(\beta)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x \cdot \Theta(\varphi) - s &= \frac{1}{(y^2 + r^2)^{1/2}}(yx \cdot \Theta(\beta) + rx \cdot \Theta_{\perp}(\beta) - ry) \\ &= \frac{r - x \cdot \Theta(\beta)}{(y^2 + r^2)^{1/2}}\left(\frac{rx \cdot \Theta_{\perp}(\beta)}{r - x \cdot \Theta(\beta)} - y\right) \\ &= c(z - y)\end{aligned}$$

mit

$$c = \frac{r - x \cdot \Theta(\beta)}{(y^2 + r^2)^{1/2}}, \quad z = \frac{rx \cdot \Theta_{\perp}(\beta)}{r - x \cdot \Theta(\beta)}$$

▶ back

## mathematische Erklärung für $c \approx 1$

- Für kleines  $\alpha$  kann allgemein in einem rechtwinkligen Dreieck Ankathete = Hypothense angenommen werden. Hier also  $r \approx (y^2 + r^2)^{1/2}$

- $c \approx 1$  bedeutet  $r - x\Theta(\beta) \approx (y^2 + r^2)^{1/2}$

$$\Rightarrow r \approx r - x\Theta(\beta)$$

$$\Rightarrow x\Theta(\beta) \approx 0$$

▶ back

# Herleitung FDK-Approximationsformel

## Koordinatensystem für $\Theta^\perp$

Für  $\Theta = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T$  ist  $\Theta_\perp = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$ .  
Unsere Koordinaten sind dann  $\Theta_\perp$  und  $e_3$ .

## Schnittpunkt Strahl mit Detektorfeld

Der Schnittpunkt des Strahls durch  $x$  mit dem Detektorfeld ist gegeben durch  $y = y_2\Theta_\perp + y_3e_3$  mit  
 $y_2 = \frac{r}{r-x\cdot\Theta}x \cdot \Theta_\perp$ ,  $y_3 = \frac{r}{r-x\cdot\Theta}x_3$ .

► Nachweis

## Detektorlinie des LFB-Scannings

Die Detektorlinie des LFB-Scannings wird dann beschrieben durch die Gleichung  $\mathbb{R}\Theta_\perp + y_3e_3$ .  
Ursprung sei der Punkt  $y_3e_3$ .

# Herleitung FDK-Approximationsformel

## Bezeichnungen in Koordinaten der LFB-Ebene

$$x' = x - y_3 e_3, \quad \Theta' = (r\Theta - y_3 e_3)/r', \quad r' = (r^2 + y_3^2)^{1/2}$$

## Gewichtungsintegral in der LFB-Ebene

$$\begin{aligned} I(x, \Theta) &= \frac{r'^2}{(r' - x' \cdot \Theta)^2} \int_{-\rho}^{\rho} h\left(\frac{r' x' \cdot \Theta_{\perp}}{r' - x' \cdot \Theta'} - y_2'\right) g(\Theta, y_2' \Theta_{\perp} + y_3 e_3) \frac{r' dy_2'}{(r'^2 + y_2'^2)^{1/2}} \\ &= \frac{r'^2}{(r - x \cdot \Theta)^2} \int_{-\rho}^{\rho} h(y_2 - y_2') g(\Theta, y_2' \Theta_{\perp} + y_3 e_3) \frac{\sqrt{r^2 + y_3^2} dy_2'}{\sqrt{r^2 + y_2'^2 + y_3^2}} \end{aligned}$$

(hierzu wird benötigt:  $x' \cdot \Theta' = \frac{r'}{r} x \cdot \Theta$ ,  $x' \cdot \Theta_{\perp} = x \cdot \Theta_{\perp}$ )

## Rückprojektion

Integration über alle Winkel  $\Theta$  (beachte den Faktor  $\frac{r'}{r}$ )

▶ back

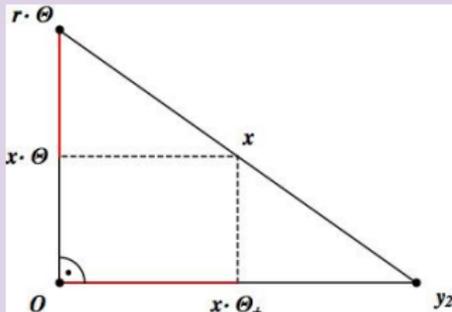
# Schnittpunkt Strahl mit Ebene

## $\Theta_{\perp}$ -Koordinate

Nach dem 2. Strahlensatz

gilt:  $\frac{r}{r-x\Theta} = \frac{y_2}{x\Theta_{\perp}}$ , also:

$$y_2 = \frac{r}{r-x\cdot\Theta} x \cdot \Theta_{\perp}$$

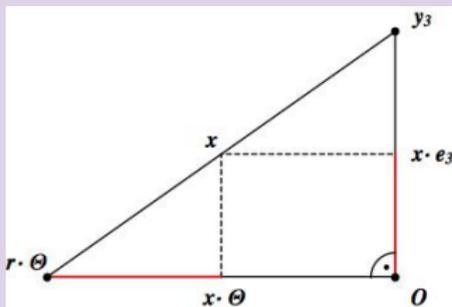


## $e_3$ -Koordinate

Nach dem 2. Strahlensatz

gilt:  $\frac{r}{r-x\Theta} = \frac{y_3}{x e_3}$ , also:

$$y_3 = \frac{r}{r-x\cdot\Theta} x_3$$



▶ back