Übungen zur Vorlesung PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Übungsblatt 1 , Abgabe: 26.10.2000 , 15.00 Uhr, Übungskasten 75, 76

Aufgabe 1: (4 Punkte)

a) Eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ heißt homogen vom Grade α, wenn

$$u(tx) = t^\alpha u(x) \ , \qquad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

gilt.
Zeigen Sie: $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ist genau dann homogen vom Grade α, wenn

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha u \ .$$

b) Lösen Sie die Aufgabe

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ ,$$

$u = f(x)$ auf dem Kreis um 0 vom Radius 1. Setzen Sie hinreichende Regularität von u und f voraus.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(a) Zeigen Sie: u ist genau dann eine radiale Funktion (d.h. $u(x)$ hängt nur von $x_1^2 + x_2^2$ ab), wenn

$$x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} = 0 \ .$$

(b) Leiten Sie eine entsprechende Differentialgleichung her für Funktionen u, welche entlang der Ellipsen $(x_1 - m_1)^2/a^2 + (x_2 - m_2)^2/b^2 = 1$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ fest, $a = kb$, $\quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, konstant sind.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^1)$ beliebig.
Zeigen Sie: Erfüllt $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ die Beziehung

$$x_2 = \frac{1}{3} u^3 + f(u - x_1) \ ,$$

so ist u Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1 \ .$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Lösen Sie die Aufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = f(x), \qquad & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c > 0$ und Funktionen $f \in C^2(\quad)$, $g \in C(\quad)$.