Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 9 , Abgabe: 21.12.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Seien r, φ, ψ Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$, also $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$ mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \psi < \pi$. Zeigen Sie:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin\psi}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r^2 \sin\psi \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sin\psi \frac{\partial u}{\partial\psi}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right) .$$

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $n = 1, 2$.

(a) Zeigen Sie: Für $n = 1$ ist $H^1(\Omega) \subseteq C(\Omega)$.

(b) Zeigen Sie an Hand des Beispiels $u(x) = \ln\ln\frac{1}{|x|}$, daß dies für $n = 2$ nicht richtig ist.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Sei V ein Hilbertraum, a eine stetige und V-elliptische Bilinearform und F ein stetiges lineares Funktional auf V. Sei $u \in V$ die Lösung der Variationsgleichung

$$a(u, v) = F(v) \ , \qquad \forall \quad v \in V \ .$$

Zeigen Sie: Ist a symmetrisch (d.h. $a(u, v) = a(v, u), \quad \forall \quad u, v \in V$), so nimmt das Funktional

$$v \to \frac{1}{2}\, a(v, v) - F(v)$$

auf V sein Minimum für $v = u$ an.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ in einem Normalgebiet $\Omega \subseteq I\!R^n$ harmonisch, und sei $y \in \Omega$.

Zeigen Sie: $u(x)$ läßt sich in einer Umgebung von y in eine Potenzreihe

$$u(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1 - y_1)^{k_1} \ldots (x_n - y_n)^{k_n}$$

entwickeln, und diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.