Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 8 , Abgabe: 14.12.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $I\!R^2$, das mindestens einen endlichen Punkt nicht enthält, und sei $y \in \Omega$. Sei f_y die analytische Funktion, welche Ω eineindeutig auf den Einheitskreis abbildet, und zwar so, daß $f_y(y) = 0$, $f_y'(y) = 1$ gilt (Riemannscher Abbildungssatz).

Zeigen Sie: Die Greensche Funktion von Ω ist

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ \log\ |f_y(x)|\ .$$

(Dabei wird der Punkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in I\!R^2$ mit der komplexen Zahl $x = x_1 + ix_2 \in \mathbf{C}$ identifiziert.)

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei f eine Funktion in $I\!R^n$, $n \geq 2$, die entlang $x_n = 0$ stetig und beschränkt ist. Für $x_n > 0$ sei

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int\limits_{y_n=0} \frac{f(y)}{|x-y|^n}\, dy_1 \ldots dy_{n-1}\ .$$

Zeigen Sie: u löst die Dirichletaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad , \quad x_n > 0\ , \\ u &= f \quad , \quad x_n = 0\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(I\!R^3)$, und f verschwinde außerhalb einer beschränkten Menge. Sei $u \in C^2(I\!R^3)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2(1+f)u &= 0 \quad \text{in} \quad I\!R^3 \\ u(x) &= e^{ikx\cdot\theta} + v(x)\ , \end{aligned}$$

wo $\theta \in S^2$, $k > 0$ und v die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt.

Zeigen Sie: Für $|x| \to \infty$ gilt

$$u(x) = e^{ikx\cdot\theta} + \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\ A(\frac{x}{|x|}) + O(\frac{1}{|x|^2})\ ,$$

wobei für $|\omega| = 1$

$$A(\omega) = k^2 \int u(y)f(y)e^{-iky\cdot\omega}dy\ .$$

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Sei Ω ein Normalgebiet in $\mathbb{R}^n$ mit Durchmesser R, und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u = g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,.$$

Dann gilt in $\overline{\Omega}$

$$|u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \frac{1}{4} R^2 \, \max_{\overline{\Omega}} |f|\,.$$