

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 7 , Abgabe: 07.12.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^n und $u \in C(\Omega)$. u habe in Ω die Mittelwerteigenschaft, d.h. für jedes $x \in \Omega$ ist $u(x)$ der Mittelwert von u über die Oberfläche jeder ganz in Ω liegenden Kugel mit Mittelpunkt x .

Zeigen Sie: Dann ist u in Ω harmonisch.

Hinweis: Die Lösung eines lokalen Dirichlet-Problems zur Laplacegleichung ist harmonisch. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt das Maximumprinzip.

Aufgabe 22: (8 Punkte)

Zeigen Sie, daß das Poissonsche Integral für den Kreis vom Radius r um den Nullpunkt die Form

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \int_{|y|=r} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dy .$$

hat.

Aufgabe 23: (4 Punkte)

- (a) Sei Ω die Kugel vom Radius r um x_0 in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, und sei $u \in C(\bar{\Omega})$ harmonisch in Ω .

Zeigen Sie: Ist $u \geq 0$, so gilt $\forall x \in \Omega$

$$\left(\frac{r}{r + |x - x_0|} \right)^{n-2} \frac{r - |x - x_0|}{r + |x - x_0|} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{r}{r - |x - x_0|} \right)^{n-2} \frac{r + |x - x_0|}{r - |x - x_0|} u(x_0) .$$

- (b) Zeigen Sie: Eine in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, harmonische Funktion, die nur ein Vorzeichen hat, ist konstant.

Aufgabe 24: (4 Punkte)

- (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ harmonisch und $x \in \Omega$. Sei r so klein, daß auch die Kugel $B_r(x)$ um x mit Radius r noch in Ω liegt. Dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{n}{\omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + ry) dy .$$

- (b) Beweisen Sie mit Hilfe von a) den Satz von Liouville: Jede beschränkte auf ganz \mathbb{R}^n harmonische Funktion ist konstant.

Hinweis zu b): Schätzen Sie $|u(x) - u(0)|$ für $x \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von a) nach oben ab.