Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 6 , Abgabe: 30.11.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Wir betrachten die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \tag{1}$$

und das lineare System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} a\frac{\partial p}{\partial x} + b\frac{\partial p}{\partial y} + c\frac{\partial q}{\partial y} &= f \ , \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei seien a, b, $c \neq 0$, f stetige Funktionen von x, y in einem Gebiet $\Omega \subseteq I\!R^2$.
Zeigen Sie:

(a) Besitzt (1) eine Lösung $u \in C^2(\Omega)$, so ist

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

eine Lösung von (2).

(b) Sind p, $q \in C^1(\Omega)$ Lösung von (2) und ist Ω einfach zusammenhängend, so gibt es eine Lösung $u \in C^2(\Omega)$ von (1) mit (3).

(c) (1) ist genau dann elliptisch (parabolisch, hyperbolisch), wenn (2) elliptisch (parabolisch, hyperbolisch) ist.

Aufgabe 19: (4 Punkte)
In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ sind die Differentialgleichungen

a.) $u_{xx} + yu_{yy} + 3u_y = 0,$

b.) $u_{yy} - yu_{xx} = 0, \quad (Tricomi - Gleichung)$

c.) $u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} + \beta u_x = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (Telegraphengleichung)$

hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch? Benutzen Sie Maple, um eine explizite allgemeine Lösung anzugeben und erklären Sie die auftretenden Funktionen.

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Sei $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und sei

$$v(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S^{n-1}} u(x+ry)\, d\sigma(y).$$

Zeigen Sie: v genügt der Gleichung

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r - \Delta v = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$v(x,0) = u(x), \qquad v_r(x,0) = 0.$$

ω_n bezeichnet dabei wieder die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel.