Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 4 , Abgabe: 16.11.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Berechnen Sie (per Hand oder mit Maple) die Charakteristiken der folgenden drei Differentialgleichungen und lassen Sie sich die von ihnen definierten Flächen von Maple für die jeweils angegebenen Definitionsbereiche graphisch anzeigen.

$$(a): \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = \ln x, \quad (x \in]0,1]);$$

$$(b): \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad u(x,0) = \ln x, \quad (x \in]0,1]);$$

$$(c): \quad xu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x,0) = x, \quad (x \in [-2,2]).$$

(Hinweis: Verwenden Sie jeweils $s = x$ für die Parametrisierung der Anfangskurve.)

Aufgabe 12: (4 Punkte)
In der Differentialgleichung

$$p = f(q)\ , \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}\ , \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

sei $f \in C^2$, und f' besitze eine differenzierbare Umkehrfunktion.

(a) Berechnen Sie den Mongeschen Kegel zu einem beliebigen Punkt (x, y, z) des $I\!R^3$.

(b) Zeigen Sie, daß er außerhalb der $x' = x$ Kurve eine Lösungsfläche ist.

(c) Geben Sie auf $\Omega = I\!R^+ \times I\!R$ für $f : \xi \to \frac{1}{2}\xi^2$ mit Hilfe der Mongeschen Kegel ein vollständiges Integral an.

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Lösen Sie die Aufgabe 8c mit Hilfe des vollständigen Integrals der Eikonalgleichung.

Aufgabe 14: (4 Punkte)

(a) Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

$$H(f(x,p), g(y,q)) = 0$$

mit $H,\, f,\, g \in C^1(I\!R^2)$ und $p = \frac{\partial u}{\partial x},\;\; q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Sei $H(a,b) = 0$, und es gebe Funktionen $\varphi,\, \gamma \in C^1(I\!R^2)$

$$f(x, \varphi(a,x)) = a\ , \qquad g(y, \gamma(b,y)) = b\ .$$

Zeigen Sie: Dann ist

$$\phi(x,y,a,b,c) = \int^{x} \varphi(a,\tilde{x})d\tilde{x} + \int^{y} \gamma(b,\tilde{y})d\tilde{y} + c$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie vollständige Integrale für die Differentialgleichungen

(i) $F(p,q) = 0$,

(ii) $p = qy$,

(iii $x^2p^2 + y^2q^2 = 1$ auf $I\!R^+ \times I\!R^+$.