Prof. Dr. F. Natterer WS 2000/2001

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 3 , Abgabe: 09.11.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Wir betrachten die Eikonalgleichung $|p| = 1$ in $\mathbb{R}^n$. Sei $\Gamma : x = \xi(1)$, $\xi \in C^2$, eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ und sei $Rg\left(\frac{\partial\xi}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial\xi}{\partial s_{n-1}}\right)$ maximal.

(a) Zeigen Sie: In einer Umgebung von Γ gibt es zwei verschiedene Lösungen, welche entlang Γ den Wert 1 annehmen.

(b) Für jede dieser Lösungen u ist $|u(x) - 1|$ der Abstand von x zu Γ.

(c) Berechnen Sie die beiden Lösungen, wenn Γ ein Teil der Sphäre $|x| = 1$ ist.

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Wir betrachten die Differentialgleichung $F(x, u, p) = 0$ mit $F \in C^1$. Für alle $a \in \mathbb{R}^2$ sei $u(x) = \phi(x, a)$ eine Lösung. Zeigen Sie:

(a) Gibt es $a \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\nabla_a\phi(x, a(x)) = 0$ in $\mathbb{R}^2$, so ist auch $u(x) = \phi(x, a(x))$ Lösung. Sie heißt singuläre Lösung.

(b) Ist die Jacobi-Matrix der Abbildung $x \to \nabla_a\phi(x, a)$ nicht singulär, so gilt für die singuläre Lösung $\nabla_p F(x, a, p) = 0$.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Wir betrachten die Clairotsche Differentialgleichung

$$u = p \cdot x + f(p) , \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

(a) Berechnen Sie die Charakteristiken.

(b) Zeigen Sie, daß für alle $a \in \mathbb{R}^n$

$$u = a \cdot x + f(a)$$

Lösung ist.

(c) Berechnen Sie die singuläre Lösung (vgl. Aufgabe 9) für $n = 2$ und $f(p) = -p_1 p_2$.

(d) Bauen Sie die singuläre Lösung explizit durch Charakteristiken auf.