Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 2 , Abgabe: 02.11.2000, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 5: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$$

(a) Zeigen Sie, daß die Anfangswertaufgabe

$$u = x \quad \text{entlang} \quad \Gamma : x + y = 0$$

eine in einer Umgebung von Γ eindeutig bestimmte Lösung hat, welche bei Annäherung an die Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ betragsmäßig unendlich wird.

(b) Die Anfangswertaufgabe

$$u = f(x) \quad \text{entlang} \quad \Gamma : x - y = 0$$

besitze eine in einer Umgebung eines Punktes von Γ stetig differenzierbare Lösung.

Zeigen Sie, daß dann in dieser Umgebung $f(x) = -1/(x + c)$ mit einer Konstanten c oder $f \equiv 0$ ist.

Aufgabe 6:

(a) Seien a, $b \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ .$$

Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ entlang jeder Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y) \ , \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y)$$

konstant, so ist u eine Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie nach der Methode aus (a) eine Lösung von

$$u_x + 3x^2 u_y = 0 \ .$$

Aufgabe 7: Sei $u = f(x, y, c)$ eine Flächenschar im $\mathbb{R}^3$ mit Parameter c. Sei g eine Funktion mit

$$\frac{\partial}{\partial c} f(x, y, g(x, y)) = 0 \ .$$

Dann heißt $u = f(x, y, g(x, y))$ Einhüllende der Flächenschar.

(a) Zeigen Sie: Ist jede Fläche der Schar Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \; ,$$

so auch die Einhüllende.

(b) Zeigen Sie, daß die Flächen

$$u = \sqrt{1 - (x-c)^2 - y^2} \; , \quad (x-c)^2 + y^2 < 1$$

für jedes c Lösungen der Differentialgleichung

$$u^2 \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = 1$$

sind und bestimmen Sie eine weitere Lösung durch Bildung der Einhüllenden.