Prof. Dr. F. Natterer WS 2000/2001

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 12 , Abgabe: 08.02.2001, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 41: (4 Punkte)
Sei $f \in C(I\!R^1)$ 2π-periodisch.

Zeigen Sie, daß die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad I\!R^1 \times (0,\infty) \\ u &= f \quad \text{in} \quad I\!R^1 \times \{0\} \end{aligned}$$

eine Lösung der Form

$$u(x,t) = \int_0^{2\pi} G(x-y,t) f(y) dy$$

mit einer in x 2π-periodischen Funktion G besitzt und geben Sie diese Funktion an.

Aufgabe 42: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Sei $u \in C^2(G \times (0,T)) \cap C(\overline{G} \times [0,T])$ Lösung der Differentialgleichung

$$u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u - cu$$

mit stetigen b, c und $c \geq 0$. Dann nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf dem parabolischen Rand von $G \times (0,T)$ an.

Aufgabe 43: (4 Punkte)
Sei für $z \in \mathbb{C}$

$$u_z(x,t) = e^{xz+tz^2} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) u_z ist Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung.

(b) u_z besitzt die Entwicklung

$$\begin{aligned} u_z(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) \frac{z^n}{n!} \ , \\ v_n(x,t) &= n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{t^k}{k!} \frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!} \ . \end{aligned}$$

(c) v_n ist Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 44: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß folgende Funktionen Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung sind.

(a) Die Theta-Reihe

$$\theta(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_1(x + 2n\pi, t)$$

mit der Fundamentallösung γ_1 (Konvergenz?)

(b) $u(x,t) = \operatorname{erfc}\,(x/\sqrt{4t})$ mit der *complementary error function*

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy\ .$$