Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 10 , Abgabe: 18.01.2001, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei Ω ein Normalgebiet in $I\!R^n$, und sei $u \in C^2(\overline{\Omega \times (0,\infty)})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta_x u \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)\ , \\ u &= 0 \qquad \text{in} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)\ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Es ist

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right)^2 \right\} dx$$

unabhängig von t.

(b) u ist eindeutig bestimmt durch die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0$.

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Sei u Lösung der Aufgabe

$$u_x - u_y - q(x)u = 0 \qquad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad , \quad x \in \mathbb{R}^1\ .$$

mit stetigen Funktionen q, ϕ. Zeigen Sie: Ist $\phi(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^1$, so ist q durch die Funktionen ϕ und $u(0, \cdot\ )$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ und

$$f(x) = \int\limits_{S^{n-1}} F(x \cdot \theta, \theta) d\sigma(\theta)\ .$$

Zeigen Sie, daß

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{S^{n-1}} (F(x \cdot \theta + t, \theta) + F(x \cdot \theta - t, \theta)) d\sigma(\theta)$$

Lösung der Wellengleichung mit den Anfangswerten $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$ ist.

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$u_{tt} = u_{xx} \ , \quad u(x,0) = 0 \ , \quad u_t(x,0) = g(x)$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Stellen Sie $u(x,x)$ für $t \geq \varepsilon$ als Funktion von x graphisch dar.

Wir wünschen allen Teilnehmern
ein gutes und erfolgreiches Neues Jahr!