Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 9, Abgabe bis 09.06.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. Zeigen Sie: Ist $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^1$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\quad u^n \in H^1(\Omega)$.
   Hinweis: Verwenden Sie die Einbettung
   $$H^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$$

2. *Kettenregel*
   Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in C^1, mit F' beschränkt. Sei U beschränt und $u \in W^{1,p}(U)$ für $1 \le p \le \infty$. Zeigen
   $$v := F(u) \in W^{1,p}(U) \quad \text{und} \quad v_{x_i} = F'(u)u_{x_i} \quad (i = 1, \cdots, n).$$

3. Uberprüfen Sie, dass für $n > 1$ die unbeschränkte Funktion $u = \log\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)$ in $W^{1,n}(U)$ liegt, für $U = B^0(0,1)$.

4. Sei U das offene Quadrat $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < 1,\ |x_2| < 1\}$. Wir definieren
   $$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 & \text{wenn } x_1 > 0, \quad |x_2| < x_1 \\ 1 + x_1 & \text{wenn } x_1 < 0, \quad |x_2| < -x_1 \\ 1 - x_2 & \text{wenn } x_2 > 0, \quad |x_1| < x_2 \\ 1 + x_2 & \text{wenn } x_2 < 0, \quad |x_1| < -x_2. \end{cases}$$
   Für welche $1 \le p \le \infty$ gehört u zu $W^{1,p}(U)$?