Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 8, Abgabe bis 03.06.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. Sei X ein Hilbertraum und u_n eine beschränkte Folge in X. Zeigen Sie, dass aus

   $$u_n \rightharpoonup u$$

   und

   $$||u_n|| \to ||u||$$

   folgt

   $$u_n \to u \quad \text{(d.h. } ||u_n - u|| \to 0)$$

2. Sei Ω beschränkt, und $X = C(\Omega)$.
   Zeigen Sie: $u_n \rightharpoonup u \in C(\Omega)$ impliziert, dass u_n punktweise gegen u konvergiert.

   Hinweis: verwenden Sie geeignete lineare Funktionale

3. Zeigen Sie:

   $$J(u) = \frac{C}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega u^2(1-u)^2 \, dx$$

   ist auf $C_0^1(\Omega) = \{u \in C^1(\Omega) \,|u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ konvex für C hinreichend gross

   Hinweis: Friedrichs-Ungleichung

4. *Distributionelle Ableitung*
   Berechnen Sie die distributionelle Ableitung von

   (a)

   $$u(x) = |x|, \quad x \in (-1, 1),$$

   (b)

   $$H(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & -1 < x < 0. \end{cases}$$