Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 7, Abgabe bis 26.05.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. *Wellengleichung in 1D, Separation der Variablen*
   Gegeben sei die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \qquad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad u_0 \in L_2(0,1), \\ u_t(x,0) &= v_0(x), \qquad v_0 \in L_2(0,1). \end{aligned}$$

   Lösen sie die Gleichung durch Separation der variablen $u(x,t) = \phi(x)\psi(t)$.

2. Seien $f, g \in C([0,\infty])$, und sei u für $x \in \mathbb{R}^3$ die Lösung von

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u(x,0) = f(|x|), \quad u_t(x,0) = g(|x|).$$

   Zeigen Sie: u hängt nur von $|x|$ und t ab, dann löst die Funktion $w(r,t) = ru(x,t)$, $|x| = r$

$$w_{tt} = w_{rr}, \quad w(r,0) = rf(r), \quad w_t(r,0) = rg(r).$$

   Geben Sie eine explizite Dartellung von u an.

3. Man definiere

$$\nabla \times B := \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) k,$$

   wo i, j und k Einheitvektoren für die x,y und z Achsen bzw sind.

   (a) Sei $E = (E^1, E^2, E^3)$ und $B = (B^1, B^2, B^3)$ Lösung der Maxwell-Gleichung

$$\begin{cases} E_t = \nabla \times B, \quad B_t = -\nabla \times E \\ \nabla \cdot B = \nabla \cdot E = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie

$$E_{tt} - \Delta E = 0, \quad B_{tt} - \Delta B = 0.$$

   (b) Sei $u = (u^1, u^2, u^3)$ Lösung der Evolutionsgleichung der linearen Elastizität

$$u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty).$$

   Zeigen beide $w := \nabla \cdot u$ und w=$\nabla \times u$ lösen die Wellengleichung aber mit veschiedenen der Ausbreitungsgeschwindigkeit.

4. Sei u eine Dichte von Partikeln, die sich mit Geschwindigkeit Eins entlang der reellen Achse nach rechts bewegen und sei v eine Dichte von Partikeln, die sich mit Geschwindigkeit Eins nach links bewegen. Wenn nach rechts bewegenden Partikeln mit Rate $d > 0$ zufällig zu sich nach links bewegenden Partikeln werden und umgekehrt, haben wir folgenden System von partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} u_t + u_x = d(v - u) \\ v_t - v_x = d(u - v). \end{cases}$$

   ziegen beide $w := u$ und $w := v$ lösen die Telegraphengleichung

$$w_{tt} + 2dw_t - w_{xx} = 0.$$