Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 6, Abgabe bis 19.05.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. *Maximumprinzip*
   Zeigen Sie: **Satz 2.13** gilt auch für
   $$\partial_t u = a\partial_{xx}u + b\partial_{yy}u + c\partial_x u + d\partial_y u,$$
   $a > 0$, $b > 0$, c, $d \in \mathbb{R}$

2. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega \times [0,T])$ Lösung von
   $$\partial_t u = \Delta u - u.$$
   Ist $(\overline{x}, \overline{t}) \in \Omega \times [0,T]$ Maximum von u, dann ist
   $$u(\overline{x}, \overline{t}) \leq 0$$

3. *Energiemethoden*
   Sei $u \in C^{2,1}(\Omega \times [0,T])$ Lösung der FOKKER-PLANCK Gleichung
   $$\begin{aligned} \partial_t u &= \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla V(x)) && \text{in} \quad \Omega \times [0,T]) \\ (\nabla u - u\nabla V) \cdot n &= 0 && \text{auf} \;\; \partial\Omega \times [0,T]) \end{aligned}$$
   Zeigen Sie:
   (i) für $c > 0$ ist $u_\infty(x) = Ce^{V(x)}$ eine stationäre Lösung.
   (ii) Ist $u(x,0) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$, dann gilt $u(x,t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$.

4. *Es gelten die Vorausetzungen der Aufgabe 3* .
   Sei c so, dass
   $$\int_\Omega u_\infty(x)\,dx = \int_\Omega u(x,0)\,dx$$
   und
   $$D(t) = \int_\Omega \frac{(u(x,t) - u_\infty(x))^2}{u_\infty(x)}\,dx$$
   gilt:
   $$D(t) \leq \gamma e^{-\lambda t}, \quad \gamma, \lambda \in \mathbb{R}_+.$$
   Hinweis: Verwenden Sie, dass $0 < C_1 \leq u_\infty(x) = Ce^{V(x)} \leq C_2$ gilt und die Poincaré-Ungleichung
   $$\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \geq \alpha \int_\Omega |v|^2\,dx \quad \forall v \quad \text{mit} \int_\Omega e^V v\,dx = 0.$$