Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 5, Abgabe bis 12.05.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. *Poissongleichung*

$$-a\partial_{xx}u - b\partial_{yy}u = f \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

Wellengleichung

$$a\partial_{yy}u - b\partial_{xx}u = f \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

Man definiere die *Fourier-Transformation* von u als

$$\mathcal{F}u(p) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix.p}u(x)\, dx, \quad p \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie $\mathcal{F}(\partial_x u) = ip\mathcal{F}(u)$.

(b) Berechnen Sie die *Fourier-Transformation* der Poisson-Gleichung und Zeigen Sie, dass auf Ellipsen

$$ap^2 + bq^2 = c$$

gilt

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{c}\mathcal{F}(f).$$

(c) Berechnen Sie die *Fourier-Transformation* der Wellengleichung und Zeigen Sie, dass auf Hyperbolen

$$bp^2 - aq^2 = c$$

gilt

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{c}\mathcal{F}(f).$$

2. *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t u - \partial_{xx}u = f$$

Man definiere die *Laplace-Transformation* von u als

$$\mathcal{L}u := \int_0^\infty e^{-st}u(t)\, dt.$$

(a) Zeigen Sie

$$\mathcal{L}(\partial_t u) = s\mathcal{L}(u)(s) - u(x, 0).$$

(b) Berechnen Sie

$$\hat{u} = \mathcal{L}_t\mathcal{F}_x(u)$$

und zeigen Sie, dass auf Parabeln

$$c = p^2 + s$$

gilt

$$\hat{u} = \frac{1}{c}\hat{f}.$$

3. *Energiemethoden*
   Zeigen Sie: Falls $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ die elliptische Gleichung

$$-a\partial_{xx}u - b\partial_{yy}u = f(x,y) \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

   löst, dann gilt für alle $v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $v = u$ auf $\partial\Omega$

$$E(u) \leq E(v)$$

   mit

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (a(\partial_x v)^2 + b(\partial_y v)^2)\, dxdy - \int_\Omega fv\, dxdy.$$

4. Zeigen Sie:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s) f(y,s)\, dyds$$

   löst

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u + f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= 0 \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$