Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 4, Abgabe bis 05.05.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. (a) Berechnen Sie zu

$$\begin{aligned} -\partial_{xx} u &= f \quad \text{in } (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

die Greenfunktion, d.h. die Darstellung

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy.$$

(b) Berechnen Sie genauso wie bei (a) zu

$$\begin{aligned} -\partial_{xx} u + \partial_x u &= f \quad \text{in } (0,1) \\ u(0) &= u(1) \end{aligned}$$

die Greenfunktion.
Hinweis: Variation der Konstanten

2. *Satz von Liouville*
Beweisen Sie mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen aus der Vorlesung den Satz von Liouville: Jede beschränkte auf ganz $\mathbb{R}^n$ harmonische Funktion ist konstant.
Hinweis: Schätzen Sie $|u(x) - u(0)|$ für $x \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft nach oben ab.

3. Wir sagen $v \in C^2(\overline{U})$ ist subharmonisch, wenn

$$-\Delta v \leq 0 \quad \text{in } U.$$

(a) Zeigen Sie für subharmonisches v, dass

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v dy \quad \text{für alle } B(x,r) \subset U.$$

(b) Zeigen Sie, dass dafür $\max_{\overline{U}} v = \max_{\partial U} v$.

(c) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und konvex. Sei u ist harmonisch und $v := \phi(u)$.
Zeigen Sie, dass v subharmonisch ist.

(d) Zeigen Sie, dass $v := |Du|^2$ subharmonisch ist, immer wenn u harmonisch ist.

4. Sei

$$\begin{aligned} -\Delta u &\leq 0 \quad \text{in } \Omega \\ -\Delta v &\geq 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$.
Zeigen Sie $u \leq v$ in Ω