Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 3, Abgabe bis 28.04.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. *Invariant ellptischen Gleichungen*

   (a) Zeigen Sie, dass die Laplacegleichung rotationsinvariant ist, d.h. für eine orthogonale Matrix O und $\Delta u = 0$ erfüllt auch

   $$v(x) := u(Ox) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

   die Laplacegleichung $\Delta v = 0$.

   (b) Wir betrachten die elliptische Gleichung

   $$a\partial_{xx}u + b\partial_{yy}u + 2c\partial_{xy}u = 0$$

   mit $a, b \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}$ und $ab > c^2$.
   Finden Sie Bedingungen an Matrizen $O \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass

   $$v(x) := u(Ox)$$

   wieder

   $$a\partial_{xx}v + b\partial_{yy}v + 2c\partial_{xy}v = 0$$

   erfüllt.

2. *Mollifier Funktion*
   Zeigen Sie, dass die Funktion

   $$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   $C > 0$ konstant, unendlich oft differenzierbar ist.