Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 2, Abgabe bis 21.04.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. Berechnen Sie die Charakteristiken der folgenden Differentialgleichungen:

   (a) $x\frac{\partial u}{\partial t} - t\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty)$

   (b) $\frac{\partial u}{\partial t} - t\frac{\partial u}{\partial x} = u \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

2. *Dualität der Transportgleichung*

   (a) Sie die Differentialoperator L_1 und L_2 definiert durch

   $$L_1 := -\partial_t u - b \cdot \nabla u,$$
   $$L_2 := \partial_t u + \nabla \cdot (bu).$$

   Zeigen Sie, dass L_1 und L_2 adjungiert sind, d.h. für alle $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega \times [0, T])$ gilt

   $$\langle L_1\phi, \psi\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \langle \phi, L_2\psi\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])},$$

   wobei das Skalarprodukt in $L^2(\Omega \times [0, T])$ folgendermaßen definiert ist,

   $$\langle v, w\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \int_0^T \int_\Omega vw \, dxdt.$$

   (b) Sie $u(., t) \in C(\mathbb{R})$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h. $u \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} u \, dx = 1$, die

   $$\partial_t u + \partial_x(bu) = 0$$

   erfüllt. Zeigen Sie, dass die zugehörige Verteilungsfunktion

   $$U(x, t) = \int_{-\infty}^x u(y, t) \, dy$$

   die folgende Gleichung erfüllt,

   $$\partial_t U + b\partial_x U = 0.$$

   Sei weiter $u(x, t) > 0 \; \forall x, t$. Zeigen Sie dass U eine inverse Funktion v besitzt, dh.

   $$v(U(x, t), t) = x \qquad U(v(z, t), t) = z,$$

   und v die folgende Gleichung erfüllt,

   $$\partial_t v(z, t) = b(v(z, t)).$$

3. *Charakteristikenmethode für inhomogene Transportgleichung*
   Geben Sie mit Hilfe der Methode der Charakteristiken eine Lösungsformel für die inhomogene Transportgleichung

   $$\begin{aligned} \partial_t u + x \cdot \partial_x u &= x + t \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

4. Gegeben Sei das System

   $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
   $$u(x, 0) = u_0(x) \qquad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+.$$

   Leiten Sie Transportgleichungen für die Funktionen $u + v$ und $u - v$ her und berechnen Sie daraus die Lösung des System mit der Charakteristikenmethode.