

Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 12, Abgabe bis 07.07.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

Wir betrachten die Semi-diskrete Approximation der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta u,$$

nämlich

$$\frac{u_N^{k+1} - u_N^k}{\tau} = \Delta u_N^{k+1}$$

mit $u_N^k = u_N(k\tau)$, $\tau = \frac{k}{N}$.

1. Zeigen Sie

(a) Für $u_N^k \in L^2(\Omega)$ existiert eine eindeutige Lösung $u_N^{k+1} \in H_0^1(\Omega)$.

(b) u_N^{k+1} minimiert

$$J_k(u) = \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega} (u - u_N^k)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

2. Sei $u(x, 0) = u_0(x) = u_N^0 \in H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für alle $M \leq N$ gilt:

(a)

$$\frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^M \int_{\Omega} |\nabla u_N^k|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_N^M)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0)^2 dx$$

(b)

$$\frac{1}{2\tau} \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\Omega} (u_N^{k+1} - u_N^k)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_N^M|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx$$

3. Leiten Sie mit 2. Abschätzungen für

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} (u_N)^2 dx \\ & \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_N|^2 dx \\ & \int_0^T \int_{\Omega} |\partial_t u_N|^2 dx \end{aligned}$$

her, wobei

$$u_N(t) := \frac{t - k\tau}{\tau} u_N^{k+1} + \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} u_N^k$$

für $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$.