Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 11, Abgabe bis 30.06.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. Wir betrachten die Laplace Gleichung mit der Potentialfunktion c:

$$-\Delta u + c(x)u = 0, \quad (*)$$

und die Gleichung in Divergenzstruktur:

$$-\operatorname{div}(a(x)Dv) = 0, \quad (**)$$

wobei die Funktion a positiv ist.

(a) Zeigen Sie, dass wenn u $(*)$ löst und $w > 0$ auch $(*)$ löst, dann löst $v := u/w$ $(**)$ für $a := w^2$.

(b) Umgekehrt, zeigen Sie, dass wenn v $(**)$ löst, dann löst $u := va^{1/2}$ $(*)$ für ein Potential c.

2. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische positiv definit.
Zeigen sie: die Gleichung

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f$$

hat für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$

3. Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion (d.h. $c'(u) \geq 0$).
Zeigen Sie, dass für alle $f \in L^2(\Omega)$ die semilineare Gleichung

$$-\Delta u + c(u) = f$$

eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ hat.

Hinweis: Betrachten Sie im Energiefunktional die Stammfunktion von c und deren Eigenschaften.

4. Sei $\epsilon > 0$, $n \leq 3$ und die Ginzburg-Landau Energie

$$E = \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{4\epsilon}\int_\Omega (u^2-1)^2 \, dx.$$

Sei $g \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie

(i) E ist schwach unterhalbstetig in $H^1(\Omega)$
Hinweis: Verwenden Sie die kompakte Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ für $n \leq 3$

(ii) Zeigen Sie E hat ein Minimum $u \in g + H_0^1(\Omega)$. Welches Randwertproblem löst u?