Übung zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 10, Abgabe bis 23.06.2011, 10 Uhr

Montag 12-14 (Briefkasten 88) Dienstag 8-10 (Briefkasten 88/81) Dienstag 12-14 (Briefkasten 81)

1. Zeigen Sie für $\Omega \subset \mathbb{R}^1$, $p > 1$:

   (a)
   $$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega).$$

   (b) Für $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ist die erste Ableitung Hölder-stetig mit Hölder-Exponent α wachsend mit p.

2. *Verallgemeinerte Poincaré*-Ungleichung
   Sei $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie
   $$||u||_{L^p(\Omega)} \leq |u|_{W^{k,p}(\Omega)}$$
   für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $\int_\Omega x^m u \, dx = 0 \quad m = 0, \cdots, k-1$.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,
   $$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega f u \, dx + \int_\Omega \nabla u g \, dx$$
   $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

   Zeigen Sie: Es existieren C_1, C_2, sodass
   $$\{E(u) \leq C_1\}$$
   nichtleer ist und $E(u) \leq C_1$ impliziert
   $$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C_2$$
   für alle $u \in H_0^1(\Omega)$.

4. Wie 3. für
   $$E(u) = \frac{1}{2} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega \lambda u^2 \, dx \right)$$
   für $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$ mit $\lambda_0 < 0$, $|\lambda_0|$ hinreichend klein.