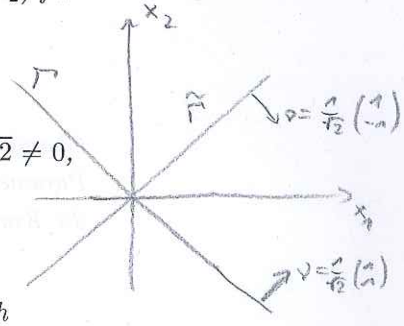
Beispiel 1. $u_{x_1} + u_{x_2} = 1$ *hat allgemeine Lösung* $u = \frac{x_1+x_2}{2} + F(x_1 - x_2)$ *für beliebiges* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



- $\left\{ \begin{smallmatrix} u_{x_1}+u_{x_2}=1 \\ u=0 \ auf\ \Gamma=\{x_1=-x_2\} \end{smallmatrix} \right\}$
  impliziert $F(2x_1) = 0\,\forall x_1$, *daher* $F \equiv 0$ *(eindeutige Lösung)*
  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$, $\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha \nu^\alpha = a_{(1,0)}\nu_1^1\nu_2^0 + a_{(0,1)}\nu_1^0\nu_2^1 = \nu_1 + \nu_2 = \sqrt{2} \neq 0$,
  d. h. Γ *ist nicht-charakteristisch*
- $\left\{ \begin{smallmatrix} u_{x_1}+u_{x_2}=1 \\ u=0 \ auf\ \tilde{\Gamma}=\{x_1=x_2\} \end{smallmatrix} \right\}$.
  impliziert $x_1 + F(0) = 0\,\forall x_1$, *daher unlösbar (keine Lösung)*
  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}$, $\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha \nu^\alpha = \nu_1 + \nu_2 = 0$, *d. h.* $\tilde{\Gamma}$ *ist charakteristisch*
- $\left\{ \begin{smallmatrix} u_{x_1}+u_{x_2}=1 \\ u=x_1 \ auf\ \tilde{\Gamma}=\{x_1=x_2\} \end{smallmatrix} \right\}$
  impliziert $x_1 + F(0) = x_1\,\forall x_1$, *daher* $F(0) = 0$ *(unendlich viele Lösungen)*
  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}$, $\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha \nu^\alpha = 0$, *d. h.* $\tilde{\Gamma}$ *ist charakteristisch*

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

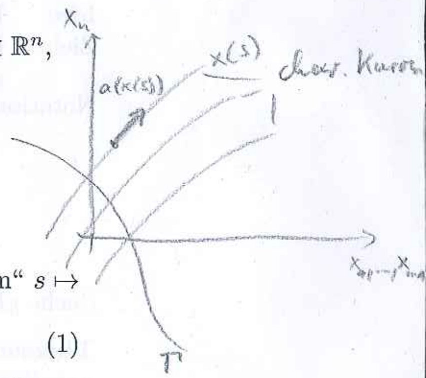
Motivation: Linearer Fall

Betrachte

$$a(x) \cdot \nabla u(x) + a_0(x) = 0$$

mit Randdaten auf einer glatten $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = g(x) \quad \text{auf } \Gamma .$$



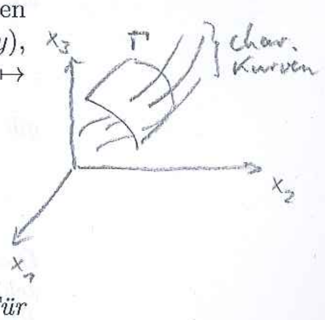
Die Richtungsableitung von u in Richtung a ist

$$a(x) \cdot \nabla u(x) = -a_0(x) ,$$

d. h. wir wissen, wie sich u ändert entlang der „charakteristischen Kurven“ $s \mapsto x(s)$ mit

$$\dot{x}(s) := \tfrac{\partial x}{\partial s} = a(x(s)) . \tag{1}$$

Sei Γ parametrisiert durch $x_0 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, x_0(y) \in \Gamma$. Zu $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ können wir s, y finden, sodass $\hat{x} = x(s)$ für eine Lösung $x(s)$ von (1) mit $x(0) = x_0(y)$, d. h. wir reparametrisieren $\mathbb{R}^n$ durch eine Funktion $\hat{x} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, (y, s) \mapsto \hat{x}(y, s)$. Es folgt



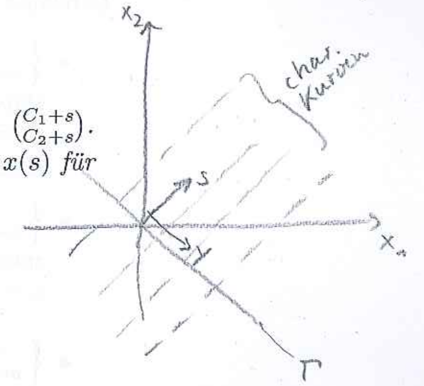
$$u(\hat{x}(y,s)) = u(x(0)) + \int_0^s \frac{\partial}{\partial \tau} u(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau = g(x(0)) - \int_0^s a_0(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau .$$

Wir erhalten $u(x) = (u \circ \hat{x}) \circ \hat{x}^{-1}(x)$

Bemerkung 2. *Damit* u *auf* $\mathbb{R}^n$ *definiert ist, muss* $\hat{x}$ *invertierbar sein. Für lokale Invertierbarkeit ist* $\det D\hat{x} \neq 0$ *hinreichend. Auf* Γ *ist* $\det D\hat{x}(y, 0) = \det(x_0'(y)|a(x_0(y)))$, *d. h. wir brauchen* $a(x_0(y)) \notin \operatorname{span}(x_0'(y))$. *Die Spalten von* $x_0'(y)$ *spannen den Tangentialraum an* Γ *auf, somit brauchen wir* $a \cdot \nu \neq 0$ *für die Normale* ν *and* Γ. *Dies ist genau die nicht-charakteristisch-Bedingung aus Cauchy–Kovalevskaya.*

Beispiel 3. *Betrachte das Cauchy-Problem*

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = 1 & \textit{im } \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \textit{auf } \Gamma = \{x_1 + x_2 = 0\}\,. \end{cases}$$



Charakteristische Kurven sind gegeben durch $\dot{x}(s) = \binom{1}{1}$, *also* $x(s) = \binom{C_1+s}{C_2+s}$. *Parametrisiere* Γ *durch* $x_0(y) = \binom{y}{-y}$ *und* $\mathbb{R}^2$ *durch* $\hat{x}$, *wobei* $\hat{x}(y,s) = x(s)$ *für die Kurve* $x(s)$ *mit* $x(0) = x_0(y)$, *also* $\hat{x}(y,s) = \binom{y+s}{-y+s}$. *Wir erhalten*

$$u(\hat{x}(y,s)) = u(\hat{x}(y,0)) + \int_0^s 1\mathrm{d}\tau = 0 + s$$

und somit $u(x) = (u \circ \hat{x}) \circ \hat{x}^{-1}(x) = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Nichtlinearer Fall

Betrachte

$$0 = F(\nabla u(x), u(x), x) \tag{2}$$

für glattes F mit glatten Cauchy-Daten auf einer glatten Hyperfläche

$$u(x) = g(x) \quad \text{auf } \Gamma\,.$$

(Glatt heißt hier C^2.)

Idee: Information fließt entlang charakteristischer Kurven.

Ziel: Finde charakteristische Kurven und wandele pDgl in System von gewöhnlichen Differentialgleichungen entlang der Kurven um.

Notation:
- Für eine Kurve $x(s)$ schreibe $z(s) = u(x(s))$ und $p(s) = \nabla u(x(s))$, d. h. $F(p(s), u(s), x(s)) = 0$.
- $\dot{} = \frac{\partial}{\partial s}$
- F_p, F_z, F_x =Ableitungen von $F(p,z,x)$ nach erstem, zweitem, drittem Argument.

Suche gDgl für z und p.

Theorem 4 (Charpits Gleichungen). *Sei* $u \in C^2(\Omega)$ *eine Lsg von* (2). *Entlang von Kurven* $x(s)$ *in* Ω *mit*

$$\dot{x} = F_p \tag{3}$$

gilt

$$\dot{z} = p \cdot F_p\,, \tag{4}$$

$$\dot{p} = -pF_z - F_x\,. \tag{5}$$

Diese gewöhnlichen Differentialgleichungen heißen Charpits oder charakteristische Gleichungen, Kurven $x(s)$ *oder* $(x(s), z(s), p(s))$ *heißen charakteristische Kurven.*

Beweis. Betrachte zunächst eine allgemeine Kurve $x(s)$. Es gilt

$$\dot{z}(s) = \nabla u(x(s)) \cdot \dot{x}(s) = p(s) \cdot \dot{x}(s)\,,$$

$$\dot{p}(s) = D^2 u(x(s))\dot{x}(s)\,.$$

Um D^2u zu ersetzen, differenzieren wir (2) nach x,

$$0 = D^2uF_p + \nabla uF_z + F_x\,.$$

Wählen wir die Kurve $x(s)$ sodass $\dot{x}(s) = F_p(p(s), z(s), x(s))$, können wir diese Gleichung einsetzen und erhalten Charpits Gleichungen. □

(4) bis (6) können mit Anfangswerten $x(0), z(0), p(0)$ gelöst werden. Sei Γ parametrisiert durch $x_0(y)$. Werte für $x(0)$ und $z(0)$ sind auf Γ gegeben durch $x(0) = x_0(y)$ und $z(0) = g(x_0(y))$ für $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. $p(0)$ erhalten wir durch Lösen von

$$\begin{cases} 0 = F(p(0), g(x_0(y)), x_0(y)) & \text{pDgl} \\ 0 = x_0'(y)p(0) - \nabla_y g(x_0(y)) & \text{Ableitung von } u(x_0(y)) = g(x_0(y)) \text{ nach } y. \end{cases} \tag{7}$$

($x_0'(y) := \begin{pmatrix} \partial_{y_1}x_{01} & \cdots & \partial_{y_1}x_{0n} \\ & \vdots & \\ \partial_{y_{n-1}}x_{01} & \cdots & \partial_{y_{n-1}}x_{0n} \end{pmatrix}$.) Die Lösung von (4) bis (6) für diese Anfangswerte liefert eine Parametrisierung $\hat{x}(y, s)$ des $\mathbb{R}^n$ mit $\hat{x}(y, s) = x(s)$ für die Kurve mit $x(0) = x_0(y)$ sowie Funktionen $z(y, s), p(y, s)$.

Definition 5 (Nicht-charakteristisch). *Eine glatte $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ heißt* nicht-charakteristisch *zu* (2), *wenn für die Einheitsnormale ν zu Γ gilt*

$$F_p(p, z, x) \cdot \nu(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \Gamma, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n\,.$$

Lemma 6. *Wenn*
- *Γ nicht-charakteristisch ist und*
- *für ein gegebenes $y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ eine Lösung von* (7) *existiert,*

dann
- *kann* (7) *auch für y in einer Umgebung U von y_0 nach $p(0)$ gelöst werden, und*
- *es existieren ein offenes Intervall $I = (-\delta, \delta)$ und eine Umgebung V von $x_0(y_0)$ sodass*

  $$\forall x \in V \exists y \in U, s \in I : x = \hat{x}(y, s)\,.$$

  $\hat{x}^{-1}$ ist C^2.

Beweis. Existenz von $p(0)$ folgt aus Satz über implizite Funktionen (beachte: $\frac{\partial}{\partial p(0)}\binom{F(p(0),g(x_0(y)),x_0(y))}{x_0'(y)p(0)-\nabla_y g(x_0(y))} = \binom{F_p}{x_0'}$ hat vollen Rang).

Existenz und Glattheit von $\hat{x}^{-1}$ folgt aus Satz über inverse Funktionen, da $\det D\hat{x}(y_0, 0) = \det\binom{x_0'}{F_p} \neq 0$. □

Bemerkung 7. *Auch hier bedeutet "nicht-charakteristisch", dass auf Γ nach den partiellen Ableitungen von u gelöst werden kann.*

Theorem 8 (Lokale Existenz). *Seien*

- *Γ, g, F C^2,*
- *Γ nicht-charakteristisch, und*
- *es gebe ein $y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ und ein $p(0) \in \mathbb{R}^n$, das* (7) *löst.*

Dann existiert auf der Umgebung V von $x_0(y_0)$ (aus Lemma 6) eine C^2-Lösung u von (2) *und* (3). *Es ist $u(x) = z(y, s)$ und $\nabla u(x) = p(y, s)$ für $(y, s) = \hat{x}^{-1}(x)$.*