Thm (Eindeutigkeit): Eine schw. Lsg. von (A) ist eindeutig.

Bew: Seien u_1, u_2 Lsgn, dann erfüllt $u = u_1 - u_2$

$$\langle u', v\rangle + B_t[u,v] = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ und f.a. } t \in [0,T]$$
$$u(0) = 0$$

Für $v = u$ ergibt sich

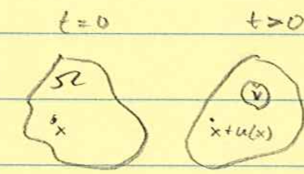
$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}{2}\right) + \underbrace{B_t[u,u]}_{\geq \beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)}}, \text{ d.h. } \frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2} \leq 2\gamma \|u\|^2_{L^2}$$

$$\underset{\text{Gronwall}}{\Longrightarrow} \|u\|^2_{L^2} \leq e^{2\gamma t}\|u(0)\|^2_{L^2} = 0. \qquad \square$$

Hyperbolische pDgln 2. Ordn.: Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

physik. Interpretation: elastische Schwingung eines Materialstückes Ω



- Verschiebungsvektor u
- Dichte ρ
- Beschleunigung von $V \subset \Omega$: $\frac{d^2}{dt^2}\int_V u\,dx = \int_V u_{tt}\,dx$
- auf V wirkende elastische Kraft: $-\int_{\partial V} F\cdot\nu\,dx = -\int_V \operatorname{div} F\,dx$, F: „Spannungstensor" $\in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Spannungstensor $F \approx a\,Du$
- Newton's Gesetz der Bewegung: $\rho\frac{d^2}{dt^2}\int_V u\,dx = -\int_{\partial V} F\cdot\nu\,dx$

$$\Rightarrow \rho u_{tt} = a\Delta u$$

Randbedingungen: physikalisch (und somit hoffentlich mathematisch) sinnvoll:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } (0,T)\times\Omega \\ u = g & \text{auf } \{0\}\times\Omega \\ u_t = h & \text{auf } \{0\}\times\Omega \\ u = f & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Explizite Lsg. 1D

- $\Omega = \mathbb{R}$
- $0 = u_{tt} - \Delta u = u_{tt} - u_{xx} = (\partial_t + \partial_x)\underbrace{(\partial_t - \partial_x)u}_{=:v}$

$\Rightarrow v_t + v_x = 0 \quad \Rightarrow v(t,x) = a(x-t)$

$\Rightarrow u_t - u_x = a(x-t) \quad \Rightarrow u(t,x) = \int_0^t a(x+(t-s)-s)\,ds + b(x+t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)\,dy + b(x+t)$

- $u|_{t=0} = g = b$

$u_t|_{t=0} = a(x) + b'(x) = h \Rightarrow a = h - g'$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y)\,dy + g(x+t) = \frac{g(x+t)+g(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy$$

Bem:
- $u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$ für best. F, G. Jede Fkt. dieser Form löst $u_{tt} - u_{xx} = 0$.
- Für $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ ist $u \in C^2$ also tatsächlich eine klassische Lsg.
- Interpretation: $g(x+t)$: Welle, die nach links läuft; $g(x-t)$: Welle nach rechts

Auf der Halbachse

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } (0,T)\times(0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \{0\}\times(0,\infty) \\ u' = h & \\ u = 0 & \text{auf } \{0\}\times\{0\} \end{cases}$$

Reflektionsmethode: Definiere $\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & x \geq 0 \\ -u(t,-x) & x < 0 \end{cases}$

Analog für g, h

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} = 0 & \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ \tilde{u} = g & \\ \tilde{u}_t = h & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}[\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy$$

Interpretation: Wellen nach links werden bei 0 reflektiert