
Aufgaben zum Praktikum

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

SS 2009 — Blatt 3

Abgabe: 4.6.2009 per Email

Lokale Gitteradaption

Im dritten Aufgabenblatt geht es darum die Verfahren aus den Aufgabenblättern 1 und 2 auf lokal adaptive Gitter zu erweitern. Dabei soll die lokale Gitterweite in Abhängigkeit der Lösung mit Hilfe eines Fehlerindikators von Zeitschritt zu Zeitschritt angepasst werden.

Aufgabe 1 (Klassenkonzept)

Zur Diskretisierung von skalaren Erhaltungsgleichungen $u(\cdot, 0) = u_0$, $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ auf $[a, b] \times [0, T]$ betrachten wir wie gehabt Rekonstruktionsverfahren der Form

$$u_i^0 := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0, \quad u_i^{n+1} := u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_{i+1/2}^L, u_{i+1/2}^R) - g(u_{i-1/2}^L, u_{i-1/2}^R)).$$

- (a) Erweitern Sie das Klassenkonzept für das zugrundeliegende Gitter, so dass lokale Gitteradaption unterstützt wird.
- (b) Erweitern Sie das Klassenkonzept für diskrete Funktionen, so dass eine lokale Gitteradaption mit entsprechenden Prolongations- und Restriktionsoperatoren für die diskreten Funktionen unterstützt wird.
- (c) Erarbeiten Sie eine Klasse AdaptionManager, die die Verwaltung der Fehlerindikatoren und der Adaptionstrategie übernimmt.

Aufgabe 2 (Implementation)

Für eine Zelle $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ definieren wir für das Zeitintervall (t^n, t^{n+1}) einen lokalen Fehlerindikator η_i^n durch

$$\eta_i^n := \Delta t \Delta x \left(|u_i^{n+1} - u_i^n| + \frac{1}{2} (|g(u_{i+1/2}^L, u_{i+1/2}^R) - f(u_i^n)| + |g(u_{i-1/2}^L, u_{i-1/2}^R) - f(u_i^n)|) \right).$$

Dabei bezeichne L die Lipschitzkonstante von f auf dem zulässigen Wertebereich von u .

- (a) Implementieren Sie in Ihrem numerischen Verfahren die zusätzliche Berechnung dieser Fehlerindikatoren und übergeben Sie die Resultate an die AdaptionManager-Klasse.
- (b) Implementieren Sie die AdaptionManager-Klasse, so dass die im Praktikum vorgestellte Adaptionsstrategie umgesetzt wird.
- (c) Implementieren Sie ein adaptives Verfahren, das unter Zuhilfenahme der Fehlerindikatoren und der Adaptionsstrategie das Rechengitter (und die darauf definierten diskreten Funktionen) von Zeitschritt zu Zeitschritt an die numerische Lösung anpasst.

Aufgabe 3 (Numerische Experimente)

Vergleichen Sie die Verfahren erster und höherer Ordnung aus Blatt 1 und 2 mit den entsprechenden adaptiven Varianten aus Aufgabe 2, indem Sie die numerische Konvergenzordnung (EOC) der Verfahren für das Beispiel aus Aufgabe 2, Blatt 1, vergleichen.

Zusatzaufgabe 4 (Optimierung der Adaptionsstrategie)

Versuchen Sie die Adaptionsstrategie zu modifizieren, um die Effizienz (Fehler versus CPU-Zeit) des Verfahrens zu erhöhen.