Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, M. Drohmann

30.4.2009

Aufgaben zum Praktikum

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

SS 2009 — Blatt 2

Abgabe: 14.5.2009 per Email

Rekonstruktionsverfahren

Im zweiten Aufgabenblatt geht es darum die Finite Differenzen Verfahren aus Blatt 1 zur Approximation von skalaren Erhaltungsgleichungen in 1D so zu erweitern, dass allgemeine Rekonstruktionsverfahren höherer Ordnung unterstützt werden können.

Aufgabe 1 (Klassenkonzept)
Zur Diskretisierung von skalaren Erhaltungsgleichungen $u(\cdot, 0) = u_0,\ \partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ auf $[a, b] \times [0, T]$ betrachten wir Rekonstruktionsverfahren der Form

$$u_i^0 := \frac{1}{dx} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0, \qquad u_i^{n+1} := u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(g(u_{i+1/2}^L, u_{i+1/2}^R) - g(u_{i-1/2}^L, u_{i-1/2}^R) \right).$$

Dabei bezeichnet $u_{i+1/2}^L$, bzw. $u_{i+1/2}^R$ die Auswertung einer stückweise polynomialen Rekonstruktion $\tilde{u}_h$ von u_h im Punkt $x_{i+1/2}$, wobei bei $u_{i+1/2}^L$ der Grenzwert von links und bei $u_{i+1/2}^R$ der Grenzwert von rechts verwendet wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Erweitern Sie das Klassenkonzept für diskrete Funktionen, so dass auch stückweise polynomiale Funktionen angelegt werden können (zumindest bis zur Ordnung 2).

(b) Implementieren Sie eine Klasse zur Realisierung eines Rekonstruktionsoperators R zur Berechnung von $\tilde{u}_h$ durch $\tilde{u}_h := R(u_h)$.

Aufgabe 2 (Implementation)
Implementieren Sie Verfahren höherer Ordnung durch folgende allgemeine Definition des Rekonstruktionsoperators:

$$\tilde{u}_h|_{[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]}(x) := R(u_h)|_{[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]}(x) := u_i + S_i(x - x_i) + \frac{1}{2} H_i (x - x_i)^2.$$

Hieraus erhält man konkrete Verfahren durch geeignete Wahl von $S_i = S_i(u_h)$ und $H_i = H_i(u_h)$. Definieren wir die Rückwärtsdifferenzen durch $\Delta_- u_i := u_i - u_{i-1}$ und die Vorfärtsdifferenzen durch $\Delta_+ u_i := u_{i+1} - u_i$, so ergeben sich beispielsweise folgende Verfahren für $H_i = 0$.

(a) **Zentrale Rekonstruktion:**

$$S_i := \frac{1}{2}\Big(\frac{\Delta_- u_i}{\Delta x} + \frac{\Delta_+ u_i}{\Delta x}\Big).$$

(b) **Minmod Rekonstruktion:**

$$S_i := \begin{cases} 0, & \text{falls } \Delta_+ u_i \cdot \Delta_- u_i < 0 \\ \operatorname{sign}(\Delta_+ u_i) \min\left(\frac{|\Delta_- u_i|}{\Delta x}, \frac{|\Delta_+ u_i|}{\Delta x}\right), & \text{sonst} \end{cases}$$

Implementieren Sie beide Varianten.

Aufgabe 3 (Numerische Experimente)
Vergleichen Sie die Verfahren höherer Ordnung aus Aufgabe 2 mit den Verfahren aus Aufgabenblatt 1, indem Sie die numerische Konvergenzordnung (EOC) der Verfahren für das Beispiel aus Aufgabe 2, Blatt 1, vergleichen.

Zusatzaufgabe 4 (Optimierung der Wahl von S_i und H_i)
Versuchen Sie anhand des Beispiels aus Aufgabenblatt 1 die Wahl von S_i und H_i in Bezug auf die numerische Konvergenzordnung weiter zu optimieren. Dokumentieren Sie Ihre Resultate.