Prof. Dr. H. Maurer, Dipl.-Math. Bahne Christiansen WS 07/08

Übungen zur Vorlesung **Optimierung I**

Übungsblatt 11, Abgabe: Freitag, 25.01.2008, 8.15 Uhr

Aufgabe 34: (3 Punkte)
Bestimmen Sie alle Minima und Maxima der Funktion

$$f(x) = x_1 \cdot x_2$$

unter der Nebenbedingung $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$. Skizzieren Sie die Niveaulinien von $f(x)$ in Bezug auf $g(x) = 0$. Berechnen Sie den Lagrange-Multiplikator λ im Satz von KUHN-TUCKER in allen Minima und Maxima.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Diskutieren Sie die KKT-Bedingungen für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{x_1} - \frac{1}{2}x_2 \\ \text{unter} \quad & x_1 \geq 0.1,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie die optimale Lösung.

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Einer Pyramide mit bekannter Unterkantenlänge a und Höhe h soll ein Quader maximalen Inhalts einbeschrieben werden (vgl. Bild 1).

a) Formulieren Sie das nichtlineare Optimierungsproblem mit Beschränkungen.

b) Geben Sie die optimale Lösung an.

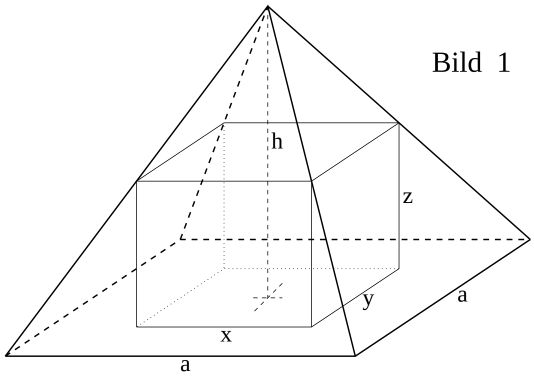

Bild 1

Hinweis: Betrachten Sie den Querschnitt und vermeiden Sie den Satz von Pythagoras.

Aufgabe 37: (4 Punkte)

(a) Die Menge S_α sei gegeben durch

$$S_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_2 - x_1^\alpha \leq 0, \quad -x_2 - x_1^\alpha \leq 0 \right\}, \quad \alpha \geq 1.$$

Skizzieren Sie S_α für $\alpha \geq 1$ und berechnen Sie den Tangentialkegel $T(S_\alpha, \bar{x})$ und den linearisierenden Kegel $L(S_\alpha, \bar{x})$ für $\bar{x} = (0,0)^T, \ \alpha \geq 1$.

(b) Seien A eine symmetrische $(n,n)-$Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie für die Menge

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, \frac{1}{2} x^T A x + b^t x \geq \alpha \right\}$$

den linearisierenden Kegel $L(S, \overline{x})$ in einem Punkt $\overline{x} \in S$ an.

Bonusaufgabe: (5 Punkte)
Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{minimiere} & (x+y)(x+y-10) \\ \text{unter} & x^2 + y^2 \leq 2 \\ & 3x + y \leq 4 \, . \end{array}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen $(\overline{x}, \overline{y}), \overline{\lambda}$ der KKT-Bedingungen. Geben Sie die globale Minimalstelle an.

Hinweis: Diskutieren Sie die Fälle $\overline{\lambda}_1 = 0$, $\overline{\lambda}_1 > 0$, sowie $\overline{\lambda}_2 = 0$, $\overline{\lambda}_2 > 0$.