Optimierung I

Übungsblatt 11, Abgabe: Montag, 17.07.17, 15:00 Uhr, BK 102

Aufgabe 1: **2 P.**

Barriere-Methode Betrachten sie das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 1 \text{ unter } 2 \leq x \leq 4.$$

Zeichnen Sie f_0 und $tf_0 + \phi$ für verschiedene Werte von $t > 0$ und markieren Sie den zentralen Pfad $x^*(t)$.

Aufgabe 2: **6 P.**

Die logarithmische Barriere basiert auf der Approximation der Indikatorfunktion der nicht-positiven reellen Linie mittels $s \mapsto -\log(-s)$. Man kann auch Barrieren aus anderen Approximationen konstruieren. Sei $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetigg differenzierbar, abgeschlossen, wachsend und konvex mit $\mathrm{dom} h = (-\infty, 0)$, z.B. $h(s) = -\log(-s)$ oder $h(s) = -1/s$ für $s < 0$. Betrachten Sie das optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) \text{ unter } f_1(x), \dots, f_m(x) \leq 0,$$

wobei die Funktionen $f_0, \dots, f_m$ zweimal stetig differenzierbar und konvex seien. Wir definieren die *h-Barriere* für dieses Problem durch

$$\phi_h(x) = \sum_{i=1}^{m} h(f_i(x))$$

und bezeichnen mit $x^*(t) = \arg\min_x tf_0(x) + \phi_h(x)$ den *h-zentralen Pfad* für $t > 0$. Wir nehmen an, dass es für jedes $t > 0$ einen einzigen Minimierer gibt.

- Erklären Sie, warum $tf_0(x) + \phi_h(x)$ konvex in x für jedes $t > 0$ ist.
- Zeigen Sie, wie ein dual zulässiger Punkt μ^* aus $x^*(t)$ konstruiert werden kann. Finden Sie die zugehörige duale Lücke.
- Für welche Funktionen h hängt die zuvor gefundene duale Lücke nur von t und m ab?

Programmieraufgabe: **12 P.**

Eine Kette ist an zwei horizontal liegenden Punkten befestigt, die l entfernt sind, und hängt durch. Die Kette besteht aus n Gliedern, die jeweils w lang sind und Gewicht m haben, siehe Abbildung 1.

Die Gleichgewichtsform der Kette ist jene, die die potentielle Energie minimiert, also die Summe der potentiellen Energien aller Glieder, die gegeben sind durch die Masse und die vertikale Position über dem Boden. Seien x_i und y_i die horizontale und vertikale (vorzeichenabhängige) Distanz überbrückt von Glied i.

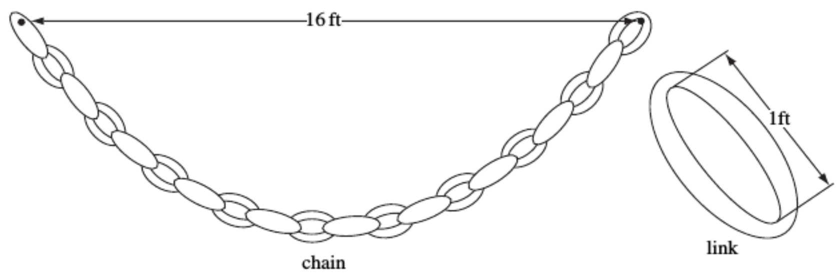

Abbildung 1: Zeichnung für $l = 16$ und $w = 1$.

- Um die Gleichgewichtsform zu bestimmen, leiten Sie das Optimierungsproblem her:

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} (n - i + m\tfrac{1}{2}) y_i \text{ unter } \sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \sum_{i=1}^{n} \sqrt{w^2 - y_i^2} = l.$$

- Bestimmen Sie die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung. Falls wir die Lagrangemutiplikatoren gefunden haben, können wir dann die Lösung explizit berechnen?

- Angenommen ein projezierter Gradient wird auf das Problem angewendet mit minimierender Liniensuche. Nehmen Sie an, dass Sie ein optimales primal-duales Paar (y^*, λ^*) gefunden haben. Geben sie die Projektionsmatrix für die Projektion auf den Tangetialraum $T_{x^*}S$ für die Menge S der zulässigen primalen Punkte an.

- Lösen Sie das Problem numerisch für $n = 20, l = 16$, $w = 1, m = 1$. Ersetzen Sie die Gleichheitsnebenbedingungen durch gute Ungleichheitsbedingungen und wenden Sie eine Barriere-Methode an. Geben Sie das Problem mit Ungleichheitsnebenbedinungen, den initialen zulässigen Punkt, mit dem Sie starten, an und plotten Sie im Programm die endgültige Lage der Kette sowie die Energie des Funktionals.